EBENE OERTER

Apollonius (Pergaeus), Robert Simson, ...

<36608287260010

Apollonius von Pergen
ebene Oerter.

Wiederhergestellt

von

Robert Simson.

Aus dem Lateinischen übersezt,

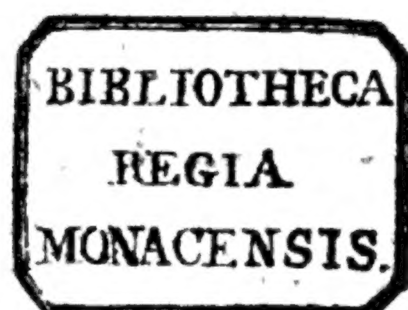
mit Berechnungen, Bemerkungen, und einer Sammlung geometrischer Aufgaben begleitet

von

Johann Wilhelm Camerer.

Mit Kupfern.

Leipzig,
bey Adam Friedrich Böhme.
1796.


BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede des Uebersezers.

Pappus giebt uns in der Einleitung zum 7ten Buch seiner mathematischen Sammlungen von mehreren Schriften der griechischen Geometer Nachricht, von denen die meisten für uns verlohren gegangen sind. Eine von Pappus am angeführten Ort beygebrachte Innhalts-Anzeige, nebst einigen zu diesen Schriften gehörigen Lehnsäzen, die er im 7ten Buch selbst liefert, ist bey vielen derselben alles, was uns davon noch übrig ist. Nach diesen wenigen Bruchstüken suchten seit zwey Jahrhunderten verschiedene Mathematiker mit mehr oder minder glüklichem Erfolg das verlohrengegangene wieder zu ersezen. Unter ihnen zeichnet sich der Engelländer Robert Simson durch seine Genauigkeit, und ächt altgeometrischen Geist vorzüglich aus. Ausser mehrern andern dahin gehörigen Schriften lieferte er 1749 die Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern. Schon vor ihm beschäftigten sich Fermat und Schooten mit eben dieser Schrift. Der Versuch des Leztern, der meist in algebraischer Rechnung besteht, kann wenigstens nicht als Wiederherstellung von Apollonius Werk betrachtet

trachtet werden. Was aber auch an Fermats Arbeit noch vermißt werde, giebt Simson in seiner hienächst folgenden lesenswürdigen Vorrede selbst richtig an, worzu man sicher noch hinzu sezen darf, daß Fermats Kompositionen sogar, die übrigens der Hauptsache nach, besonders im ersten Buch mit den Simsonschen beynahe überall einerley sind, ihnen doch an vollständiger Entwiklung und Genauigkeit weit nachstehen. So wird, um nur Ein Beyspiel anzuführen, bey 5, I. von Fermat nicht, wie von Simson, erwiesen, sondern blos voraus gesezt, daß dieselbe gerade Linie, die dem einen Kreis begegnet, nothwendig auch dem andern begegnen müsse. Ein ähnlicher vorläuffiger Beweis, der fast überall nothwendig wäre, fehlt überhaupt bey Fermat durchgängig. Ein anderer Unterschied zwischen Fermats und Simsons Verfahren ist dieser, daß, wo Simson einen Ort auf einen der vorhergehenden zurük bringt, Fermat gewöhnlich, ohne diese Beyhülffe, Verzeichnung und Beweis unmittelbar herleitet. Fermats Verfahren kann manchmahl die kurze Uebersicht, besonders bey der Verzeichnung, erleichtern, indem man nicht erst auf das Vorhergehende zurük gewiesen wird. Simsons Verfahren hingegen ist kürzer, besonders in Ansehung des Beweises, methodischer, und hat vorzüglich den Vortheil, daß, wenn nun einmahl bey dem vorhergehenden Ort gezeigt ist, daß, oder, unter welchen Umständen, der gesuchte Ort nothwendig geschnitten werden müsse,

diß

diß bey einem folgenden auf diesen zurük gebrachten Ort nimmer ausführlich gezeigt zu werden braucht. *) Wo sonst noch Simson und Fermat verschiedene Wege einschlagen, ist überhaupt immer höchste Wahrscheinlichkeit, daß Simson den Fußstapfen des Pergäers am nächsten folge, weil er dieselben Lehnsäze zu seiner Arbeit anzuwenden wußte, welche man nach Pappus Zeugniß schon zu seiner Zeit darzu brauchte, welches Fermat nicht thut. So schäzbar aber diese Schrift, theils ihres interessanten Innhalts, theils der treflichen Simsonschen Ausführung wegen, dem Geometer seyn muß; so selten war sie doch bisher in Deutschland, und selbst auch auswärts zu bekommen. Dieser Umstand allein kann die Unternehmung gegenwärtiger Ausgabe rechtfertigen, über welche ich jezt noch ein paar Worte beyzufügen habe.

Die paar Seiten griechischen Texts, welche eigentlich die Säze des Apollonius enthalten, sind, wie Simson zeigt, in allen bisher vergli-

*) Wollte man mit einigen der später folgenden Säze den Anfang machen, und sie ungefähr nach Fermats Art unmittelbar erweisen; so liesse sich alsdann das Simsonsche Verfahren umkehren, und viele der Säze, die jezt voran stehen, als blosse Zusäze aus den nachfolgenden herleiten. So liessen sich z. B. die Säze des ersten Buchs 4—19 auf die vier 16—19 bringen. Kürzer wäre nun diß Verfahren freylich, aber wohl nicht eben so einfach oder methodisch, als das Fermatsche oder Simsonsche. Doch kann diese Bemerkung dienen, die Säze sowohl, als die ihnen zugehörigen Berechnungen, desto leichter unter einander zu vergleichen.

chenen Mscpten von Pappus, an einigen Stellen unrichtig. Ich verglich zwar aufs neue sorgfältig die 2 Codd. 2368 und 2440 der ehemals königlichen Bibliothek zu Paris, welche die einzigen sind, die unter den daselbst aufbehaltenen das 7te Buch des Pappus enthalten, und noch, wiewohl diesen leztern sehr flüchtig, einen Cod. der Strasburger Universitäts-Bibliothek, der ehmals Dasypodius zugehört hatte. Alle diese Codd. aber sind sehr jung, und offenbahr erst aus dem 16ten Jahrhundert, stimmen auch alle in den fehlerhaften Lesarten überein. Zum Glük hat die Kritik für mathematische Werke etwas minder strenge Regeln, als für die Schriften aus jeder andern Wissenschaft. Wenn Zusammenhang, wenn mathematische Evidenz eine Lesart verwirft, oder anzunehmen befiehlt, so muß sie troz aller Codd. verworffen oder angenommen werden, und solche kritische Konjecturen sind, wie Herr Hofrath Kästner irgendwo sagt, sicherer als Bentleys Verbesserungen des Horaz. Aus diesem Grunde erlaubte ich mir auch, bey den Lehnsäzen des Pappus, die, um alles beysammen zu haben, was wir noch von den kostbaren Ueberbleibseln dieses Werks besizen, aus den angeführten Mscpten der ehmals königlichen Pariser Bibliothek, hier zum erstenmahl im Original gedrukt erscheinen, die nöthigen Verbesserungen sogleich einzurüken, wo ich jedoch um der Leser willen, die etwa ein allzuzärtliches kritisches Gewissen haben möchten, die

fehler-

fehlerhafte Lesart der Mscpte bey solchen Stellen unten am Rand beyfügte. Wo aber wenigstens eins der Mscpte eine richtige Lesart hatte, hielt ichs für überflüssig, eine Variante anzugeben. In Ansehung des Simsonschen Texts änderte ich nichts, einige wenige Abkürzungen ausgenommen, welche die Deutlichkeit zu erlauben schien. Euklids Data sind in der Uebersezung nach der verbesserten Simsonschen Ordnung, die seit Hrn. Geheimen Hofrath Schwabs Ausgabe der Data ohnehin jezt unter uns die bekannteste ist, nicht wie im lateinischen Original nach der Gregorischen angeführt. Zu der Simsonschen Arbeit fügte ich noch analytisch-trigonometrische Rechnung in allen denjenigen Fällen bey, wo sie nicht ganz unmittelbar aus der Komposition floß. Endlich sind in dem von mir beygesezten ersten Anhang noch Bemerkungen über einige dieser Oerter, und in dem zweyten Anwendungen der Oerter bey Auflösung geometrischer Aufgaben enthalten. Ueber diese Anwendung der Oerter zur Auflösung der Aufgaben, und eben so auch über die verschiedenen umgekehrten Säze, die sich aus den Oertern herleiten lassen, könnten noch manche Bemerkungen gemacht werden, wenn es der Raum hier erlaubte.

Noch erfülle ich hier eine angenehme Pflicht, indem ich meinem verehrungswürdigsten Lehrer, Herrn Professor Pfleiderer zu Tübingen, dessen Unterricht, litterarischer Unterstüzung, und sonstiger Gewogenheit ich überhaupt sehr vieles zu danken

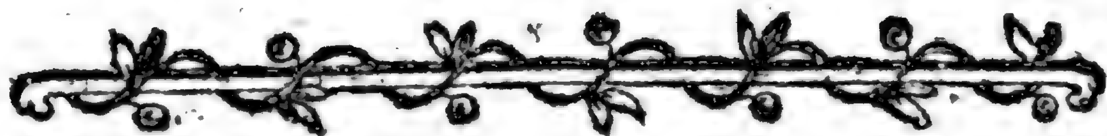
danken habe, insbesondere für Seine gütige Theilnahme bey der gegenwärtigen Arbeit, öffentlich meinen lebhaftesten Dank bezeuge. Außerdem, daß mich der Herr Professor zuerst zu dieser Arbeit aufmunterte, war Er noch besonders so gütig, mein Msc. durchzusehen, und mir Bemerkungen darüber mitzutheilen.

Ich würde mich glücklich schätzen, wenn meine Bemühungen auch nur etwas dazu beytragen sollten, das Studium der so trefflichen analytisch-geometrischen Bücher der Alten unter uns allgemeiner zu machen. Es wäre doch wirklich schimpflich, wenn es noch länger Gelehrte *) geben sollte, die Euklids Data für Geschenke ansähen, welche irgend ein arabischer Emir dem Beherrscher der Gläubigen zu Füßen gelegt habe, oder Bibliothekare **), die Apollonius Büchern vom Kegelschnitten, oder andern geometrischen Abschnitten, ihren Platz neben den Abhandlungen vom Kaiserschnitte anwiesen.

*) S. Oriens Nauwerinus, sive bibliotheca Erudita, p. 102.

**) S. Kaestl bibliotheca Geometr. Seite p. 20.

Simsons



Simsons Vorrede.

Die alten Geometer haben nicht weniger als drey und dreyßig zur Analyse gehörige Bücher geschrieben. Diß erzählt Pappus von Alexandrien, der allein die Nahmen dieser Bücher, und die Säze, welche sie enthielten, zu großem Vortheil der Geometrie uns aufbehalten hat. Er sagt zugleich, diese Bücher seyen blos für diejenigen nüzlich, die sich eine Fertigkeit in Auflösung der Aufgaben erwerben wollen. Da die Neuern die Deutlichkeit und Zierlichkeit der Alten bey den Beweisen und Verzeichnungen der Lehrsäze und Aufgaben bemerkten, schlossen sie zwar mit Recht, jene müßten die Analyse vorzüglich bearbeitet, und es darinn sehr weit gebracht haben; dabey aber äusserten einige den wunderlichen Gedanken, die Alten haben diese Kunst geflissentlich geheim gehalten. So schreibt Franz Schooten in seiner Abhandlung de concinnandis demonstrationibus, die zu Amsterdam 1661 gedruckt worden, von den alten Geometern folgendes: »sie (die Alten) scheinen, »um mit ihren Erfindungen und deren Beweisen bey der »Nachwelt desto größere Bewunderung zu erregen, sich »recht Mühe gegeben zu haben, die Art, wie sie auf »diese Erfindungen und Beweise gekommen waren, völ»lig zu unterdrüken und zu versteken.« Und noch deutlicher drükt Peter Schooten, Franzens Bruder, in der

Vorrede zu eben diesem Buch, Franzens Meinung so aus: „Er (Franz) zweifelte auch gar nicht daran, daß „wohl die Alten das meiste, womit sie sich so großen „Ruhm erwarben, durch die Analyse gefunden, und nur, „um mit ihren Erfindungen desto grösseres Aufsehen zu „machen, diese Kunst geheim halten, und ihre Säze „blos in der gewöhnlichen synthetischen Form dargestellt „haben. Weil er nun sahe, daß es durch diese Ver„heimlichung der Alten dahin gekommen seye, daß Viele „nicht nur diesen treflichen Nuzen der analytischen Me„thode nicht kennen, und vernachlässigen, sondern auch „selbst an ihrer Gewisheit und Evidenz zweifeln, und „deßwegen unglücklich genug seyen, sich über der Syn„these allein müde zu arbeiten, hielt er es für gut u. s. w." Wirklich eine starke Anklage der Alten, zu der sie aber wahrhaftig gar keine Veranlassung gegeben haben, sondern die sich blos auf die geringe Bekanntschaft der Neuern zu Schootens Zeiten mit den Schriften der Alten gründet! Denn da Schooten und andere gewiß wußten, daß den Alten eine Analyse bekannt gewesen seye, und doch aus eigener Schuld keine andere Analyse kannten, als die Algebräische, von der Algebra aber vor Diophant keine Spur fanden; schlossen sie daraus, die Alten haben die Analyse mit Absicht verborgen gehalten. Peter Nunnez scheint diese Meinung zuerst aufgestellt zu haben, der fol. 114. b. seiner Algebra so über die Alten klagt: „Wie gut wäre es, wenn diejenigen, die über „mathematische Gegenstände geschrieben haben, ihre Er„findungen nach eben der Methode, und eben den Schlüs„sen aufgezeichnet hätten, durch welche sie selbst darauf „gekommen sind, und es nicht gemacht hätten, wie Ari„stoteles in seiner Mechanik von Künstlern sagt, die uns „ihre Maschinen nur von aussen zeigen, aber das Kunst„werk verstecken, damit sie desto mehr bewundert werden „mögen. Die Erfindung ist sicher in jeder Kunst von

„dem

„dem Lehrvortrag sehr verschieden, und man darf gar „nicht glauben, daß die meisten Säze Euklids oder Ar„chimeds auf dem Weg erfunden worden seyen, auf wel„chem sie uns darzu führen.“ Und diese Meinung nimmt dann auch Wallis an im Anfang des 2ten Kapitels seiner Algebra, wo er eben diese Stelle des Nunnez aus dem Spanischen ins Lateinische übersezt hat. Der nemlichen Meinung ist, wie ich schon bemerkt habe, auch Schooten, und die meisten Neuern. Was Peter Nunnez betrift, so verdient er Entschuldigung, weil er wahrscheinlich die mathematischen Sammlungen des Pappus von Alexandrien niemahls gesehen hat. Denn Nunnez Algebra ist zu Antwerpen im Jahr 1567. gedrukt worden, von Pappus Sammlungen aber hatte man vor dem Jahr 1588. keine Ausgabe. Aber Wallis (s. S. 2 seiner Algebra Vol. 2. Opp.) und Schooten (s. seine Vorrede zu den Locis Planis Apollonii) sahen Pappus Vorrede zum 7ten Buch seiner Sammlungen, worinn er die angeführten analytischen Bücher der Alten der Reihe nach hererzählt, und aus dem Innhalt dieser Bücher, von dem in eben dieser Vorrede ein vollständiger Auszug geliefert ist, sieht man sehr deutlich, daß die Alten ihre analytische Kunst sogar nicht unterdrückt und geheim gehalten haben, daß sie vielmehr dieselbe nicht nur mit großem Fleis bearbeiteten, sondern auch durch so viele darüber geschriebene Bücher öffentlich bekannt machten. Nun waren diese Bücher 600 Jahre und drüber, nemlich von Apollonius bis auf Pappus Zeiten in den Händen der Geometer. Folglich ist diese Anklage gegen die Alten so abgeschmakt, daß sie blos von der Unachtsamkeit der Neuern herrührt, aber keineswegs für wahr gehalten werden kann.

Der berühmte Halley, dem ächte Geometrie so viel zu danken hat, meynt (s. seine Vorrede zu den Büchern des Apollonius de sectione rationis), Pappus habe die

 ange-

angeführten 33 Bücher unter dem Titel τόπȣ ἀναλυομένȣ gesammelt, um zum Unterricht in der Analyse rechte treffende, und der Fassungs-Kraft der Lernenden anpassende Beyspiele zu geben. Man sieht aber aus dem, was wir von dem Innhalt dieser Bücher wissen, deutlich, daß sie in der Absicht geschrieben worden, um dadurch den Liebhabern der Analyse die zu Auflösung der Aufgaben vorzüglich nothwendigen Hülfsmittel, schon ganz zum Gebrauch vorbereitet, in die Hände zu liefern. Zu diesem Zweck nun dienten sie auf verschiedene Art. Euklids Data enthalten Säze, die bey Auflösung der Aufgaben jeder Art beständige und nothwendige Anwendung finden. Die Bücher von den ebenen Oertern, von den Oertern an den Kegelschnitten (loca solida) und von den Oertern an der Oberfläche (loca ad superficiem), so wie auch die Porismen sind bey der Auflösung verschiedener Aufgaben brauchbar. Denn, wenn z. B. aus einer Voraussezung, oder Bedingung einer Aufgabe folgt, daß ein in der Aufgabe gesuchter Punkt einen der Lage nach gegebenen Ort berühre, und aus einer andern Bedingung folgt, daß derselbe Punkt einen andern der Lage nach gegebenen Ort berühre; so muß, wenn man diese Oerter beschreibt, der gesuchte Punkt nothwendig in ihrem Durchschnitt liegen, und eben damit ist folglich die Aufgabe aufgelöst. Die Bücher von dem Verhältniß-Schnitt, Schnitt des Raums, und bestimmten Schnitt, von den Berührungen und Neigungen (libri de sectione rationis, spatii, de sectione determinata, de tactionibus et inclinatiomibus) enthalten sehr allgemeine Aufgaben, auf welche die Auflösungen anderer Aufgaben öfters zurükgebracht werden. So oft nun diß geschieht, so ist die Aufgabe aufgelöst, und man darf nur das Buch und den Saz zitiren, auf welchen sie zurükgebracht worden, wovon man bey Pappus Beyspiele findet. Deßwegen waren auch in allen diesen

analy

analytischen Büchern alle Fälle, und alle Bestimmungen der in ihnen aufgelösten Aufgaben vollständig hergezählt und aufgelöst, damit, so oft eine Aufgabe auf einen dieser Fälle zurükgebracht wäre, die Auflösung dieses Falls, und seine Bestimmung, wenn er eine hatte, sogleich in die Augen fiele.

Unter diesen Büchern der Alten für die geometrische Analyse haben die zwey Bücher des Apollonius von ebenen Oertern bey der Auflösung verschiedener Aufgaben besonders häufige und vorzügliche Anwendung. Es hatte dieselbige der scharfsinnige Fermat noch vor dem Jahr 1629 wieder hergestellt, wie man aus einem Brief von ihm S. 153 seiner Opp. sieht. Sie wurden aber erst im Jahr 1670 unter Fermats Operibus Variis gedrukt. Auch Schooten hat sie wiederhergestellt, und von diesem erschienen sie gedrukt im Jahr 1657 unter seinen Exercitationibus Mathematicis. Beyde aber ließen die besondern Fälle und Bestimmungen der Oerter hinweg, ohne welche sie nur wenig brauchbar sind; auch zeigen sie bloß die Synthese der Oerter ohne ihre Analyse, ausser etwa bey 2 oder 3 Oertern, wo Schooten den arithmetischen Kalkul braucht.

Es schien mir also der Mühe werth zu seyn, diese Bücher vollständiger, und mehr dem Zwek des Apollonius gemäß darzustellen: auch glaubte ich, der Gebrauch und die Erklärung der Lehnsäze, welche Pappus für diese Bücher schrieb, oder, wenn sie von Apollonius herrühren, für uns aufbehielt, dürften den Geometern nicht unangenehm seyn. Der größte und vorzüglichste Theil davon ist von Fermat, Schooten und Andern gar nicht berührt worden, und man wußte seit der ersten Ausgabe von Pappus Sammlungen bis auf unsere Zeiten nicht, zu welchem Ort sie gehörten, und zu welchem Gebrauch sie dienten. Mit Hülfe einiger von diesen Lehnsäzen ist die Auflösung, welche Apollonius selbst von dem Ort ge-

 geben

geben hatte, der in dem 5ten Saz des 2ten Buchs vorkommt, und den Fermat einen der schönsten Säze der Geometrie nennt, mit einer Zierlichkeit wiederhergestellt worden, die Fermats Auflösung weit übertrift. Schootens Auflösung ist ein blos arithmetischer Kalkul.

Vielleicht werden einige, die mehr an algebraischen Kalkul als an geometrische Analyse gewöhnt sind, meynen, die ebenen Oerter, und die Oerter an Kegelschnitten haben nur geringen Nuzen, weil sie keine Säze enthalten, die man nicht auf wenige allgemeine (algebraische) Regeln zurükbringen könne, dergleichen man von Descartes und Johannes de Wit hat, welche nachher Johannes Craig, und aus ihm der Marquis de l'Hôpital noch allgemeiner ausgedrükt haben. Allein diese Regeln sind von keinem Gebrauch beym Aufsuchen der Oerter, sondern dienen nur darzu, einen Ort, der in einer schon gefundenen Gleichung enthalten ist, mit Hülfe einer dieser Regeln zu verzeichnen. Ja selbst darzu sind diese Regeln nur wenig tauglich, wenn der zu verzeichnende Ort entweder weit einfacher, oder weit zusammengesezter ist, als derjenige, welcher in der Regel enthalten ist, nach welcher er verzeichnet werden soll. Denn in diesem Fall wird man immer die Verzeichnung durch Umwege auf eine gar nicht natürliche Art erhalten. Ueberdiß, wenn einmahl die geometrische Analyse einer Aufgabe oder eines Orts gut gemacht ist; so ergiebt sich gemeiniglich die Komposition ohne weitere Schwierigkeit von selbst. Hingegen, wenn ein Ort auf eine Gleichung gebracht ist; so wird öfters, die Komposition nach der allgemeinen Regel zu machen, mehr Arbeit und Scharfsinn erfodert, als die Gleichung zu finden. Es könnte diß leicht mit vielen Beyspielen aus dem Marquis de l'Hôpital und andern Schriftstellern bewiesen werden; ich will aber nur eines davon anführen.

Die

Die Regeln: $y = c + \frac{bx}{a}$, und $y = c - \frac{bx}{a}$ sind zwey von denen, welche die Schriftsteller zur Verzeichnung der Oerter an der geraden Linie angeben. Nun wollen wir dann sehen, wie sie diese Regeln anwenden bey der Verzeichnung eines Orts, z. B. dessen, der in dem 11ten Saz des 1sten Buchs der von Schooten wiederhergestellten ebenen Oerter des Apollonius vorkommt. Dieser Ort wird nach Schootens Auflösung (Exercitat. Mathem. S. 210) auf folgende Gleichung gebracht: $y = cdio + efko + ghlo + abnx + cdox - efox - ghox$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$. Nun sagt Schooten, man solle Kürze halber p schreiben statt $cdio + efko + ghlo$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$, und $\frac{q}{r}$ statt $abn + cdo - efo - gho$ getheilt durch $mzz + bnz - doz - foz + hoz$; so erhält man $y = p \pm \frac{q}{r} x$. Weil man nun diese Gleichung, wenn p, q und r bekannt sind, leicht verzeichnen kann; so glaubt er damit die Verzeichnung der vorgelegten Gleichung gelehrt zu haben; denn ausser dem angeführten findet man nichts bey Schooten für die Komposition, d. i. die Verzeichnung und den Beweis des Orts. Und so haben diejenigen, welche diesen Weg einschlagen, mit solchen kindischen Operationen sich und die Schüler der Geometrie zum Besten. Aber ausserdem daß diese und ihr ähnliche Gleichungen völlig ungeometrisch sind, wer sieht nicht, daß, die Größen p, q, r geometrisch zu finden, um vermittelst derselben die Gleichung zu verzeichnen, weit schwerer seyn müßte, als die Gleichung selbst zu finden, und daß hierzu die Regel $y = p \pm \frac{q}{r} x$ gar nichts helfe? Und das nemliche muß

man von den Regeln sagen, welche sie für die Verzeichnung der Oerter am Kreise, und an den Kegelschnitten angeben. Diejenigen, die bloß an dergleichen algebraische Rechnungen gewöhnt sind, werden nie, als etwa von ohngefähr, im Stande seyn, natürliche und schöne Beweise der Lehrsäze, oder Auflösungen der Aufgaben und Oerter zu geben. Und man hat für geometrische Analyse und Composition von den in den angeführten analytischen Büchern der Alten enthaltenen Säzen mit Recht mehr zu erwarten, als von allen Lehren der Algebra.

Der hier folgende griechische Text ist aus der Vorrede des Pappus von Alexandrien zu dem 7ten Buch seiner mathematischen Sammlungen, die der berühmte Halley den 2 Büchern des Apollonius von dem Verhältniß-Schnitt vordruken ließ. Dieser gedrukte Text ist mit zwey in der königlichen Bibliothek zu Paris befindlichen Mscpten genau verglichen worden von Herrn Jacob Moor, der sich sowohl mit der Mathematik, als mit der griechischen Sprache, die er auf unserer Universität (zu Glasgow) lehrt, viel und glüklich beschäftiget hat. Mit Hülfe dieser Mscpte sind einige Verbesserungen vorgenommen worden, die unten am Rand bemerkt sind. Der eine Kodex ist No. 2368, der andere No. 2440.

ΤΟΠΩΝ

ΤΟ'ΠΩΝ 'ΕΠΙΠΕ'ΔΩΝ β'.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοί, οὓς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων[a]) στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμήν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοί, ὡς σημείου μὲν γραμμήν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν· οἱ δὲ ἀναστροφικοί, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. Τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων· οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέν τοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. Λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαί, παραβολαί, ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. Γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται, ὅσαι γραμμαί εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι, οὔτε κύκλοι, οὔτε τὶς τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. Οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προ-

a) In Halleys griechischen Text rückte ich noch aus den angeführten Mscten der königlichen Pariser Bibliothek das Wort ἰδίων ein. (Diß Wort hat auch das Mscpt von Dasypodius.)

προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων* ἐκείνοις. Οἱ μὲν ὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τύτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐςοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτὺς προσέθηκαν ἑτέρυς, ὡς ὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν ὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. Θήσω ὖν τὰ μὲν προκείμενα ὕςερα, τὰ δὲ τῆς b) τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν c), ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένυ σημείυ, ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας, ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχυσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχυσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχυσαι δεδομένον, ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδυ τόπυ θέσει δεδομένυ, ὅτε μὲν τῦ ὁμογενῦς, ὅτε δὲ τῦ ἑτέρυ, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένυ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. Τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρυ γ' συμφωνεῖ d) ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχυσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνυ χωρίυ μεγέθει δεδομένυ ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτῦ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείυ ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο

b) Die angeführten Mscpte haben: ἐκ τῆς τάξεως.

c) Die angeführten Mscpte lesen ganz richtig das Wort ἀχθῶσιν, das in Halleys gedruktem Text fehlt.

d) Ich sezte aus den Mscpten συμφωνεῖ statt des im gedrukten Text stehenden συμφερονεῖ.

δύο εὐθείας, παραλλήλους ἢ συμπιπτούσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον, ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστίν· ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι e) ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ᾖ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας

e) Diese Aenderung erlaubte ich mir nothgedrungen, denn Halleys gedrukter Text, und so auch die Mscpte haben die Lesart: ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιεχούσας. Bey dieser Lesart wäre der Ort im zweyten Fall kein ebener Ort, sondern ein Ort an einer Hyperbel.

ρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἦ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνȣ̃ν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἦ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τȣ̃ σημείȣ παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ἦ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλȣ θέσει δεδομένȣ δοθέν τι σημεῖον ἦ, καὶ δι' αὐτȣ̃ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἦ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τȣ̃ δοθέντος ἐντὸς σημείȣ ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τὸ μόνον, ἢ τȣ̃το τε καὶ τὸ [f]) ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τȣ̃το μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρα τȣ̃ δεδομένȣ σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. Ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ', λήμματα δὲ ὀκτώ.

f) Die Ursache dieser Aenderung ist unten angegeben. Denn in dem gedrukten Text und in den Mscpten heißts: τῷ μόνῳ ἢ τȣ́τῳ τε καὶ τῷ.

Πάππȣ

Πάππε λήμματα εἰς τὰ τῶν ἐπιπέδων τόπων βιβλία.

Εἰς τὸν τῦ δευτέρε πρῶτον τόπον. g)

Fig. 1.

α) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διήχθω τυχῦσα ἡ αδ, καὶ ἔςω ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτω τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βδγ τῷ ἀπὸ αδ. Ἤχθω διὰ τῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γε. Ἔςιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γε, καὶ τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ὑπὸ αβ, γε. ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, ἕτως ἦν τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. Ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ ὑπὸ βα, γε τῷ ὑπὸ αγ. Ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ἐναλλάξ. Ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ὑπὸ γαδ τῇ β. ὥςε ἴσον ἐςὶ τὸ ὑπὸ βδγ h) τῷ ἀπὸ αδ. Τὸ δὲ ἀναςρεφόμενον φανερόν.

Εἰς τὸν δεύτερον τόπον.

Fig. 2.

β) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ κάθετος ἡ δα· ὅτι μὲν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐςὶ τῇ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχῇ. Ἐὰν δὲ ἡ βγ δίχα τμηθῇ τὸ ε, ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ i) ἐςὶ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. Ὅτι μὲν ὖν ἡ τῶν ἀπὸ βα, αγ ὑπεροχὴ ἴση ἐςὶ τῇ τῶν ἀπὸ δβ, δγ ὑπεροχῇ, φανερόν. Ἔςι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῦ k) αβ ἴσον

g) Simson macht zwar am gehörigen Ort gegen die Ordnung dieser Lehnsäze bedeutende Einwürfe. Inzwischen ließ ich sie hier doch auf einander folgen, wie sie in den Mscpten stehen. Man wird Simsons Einwendungen nur um so besser verstehen. A. d. U.

h) Die Mscpte haben βαγ.

i) Die Mscte blos: ἡ τῶν ἀπὸ βδ.

k) Mscpte ἀπὸ τῶν αβ.

ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, αδ. Τὸ δὲ ἀπὸ αγ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ. Ὧι ἄρα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τȣ̃ ἀπὸ αγ, τȣ́τῳ ὑπερέχει τὰ [l]) ἀπὸ αδ, δβ τῶν ἀπὸ αδ, δγ. καὶ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ αδ. λοιπὸν ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ βδ τȣ̃ ἀπὸ δγ, [m]) τȣ́τῳ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ τȣ̃ ἀπὸ αγ. Τῶν δὲ ἀπὸ βδ, δγ τὸ δὶς ὑπὸ βγ, εδ. ὥςε καὶ τῶν ἀπὸ αβ, αγ. Ὅτι καὶ ἡ τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐςι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε ȣ̃τως. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐςιν ἡ βε τῇ εγ, ἡ βδ ἄρα ἴση ἐςὶ συναμφοτέρῳ τῇ γεδ. καὶ τὸ ἀπὸ βδ [n]) ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρȣ τῆς γεδ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρȣ τῆς γεδ τȣ̃ ἀπὸ γδ ὑπερέχει τῷ τετράκις ὑπὸ γεδ, τȣτέςι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε. Ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ βδ, δγ ὑπεροχή ἐςι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, δε.

Εἰς τὸν αὐτὸν, ἐὰν μὴ ὁ λόγος ἴσȣ πρὸς ἴσον.

Fig. 3.

γ) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τὸ ἀπὸ βα τȣ̃ ἀπὸ αγ δοθέντος μεῖζον ἔςω ἢ ἐν λόγῳ· δοθὲν μὲν τὸ ε, λόγῳ δὲ τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. ὅτι μεῖζόν ἐςι τὸ ὑπὸ δβγ [o]) τȣ̃ ε χωρίȣ. Ἀφῃρήσθω γὰρ τὸ δοθὲν χωρίον τὸ ὑπὸ αβη. λοιπȣ̃ [p]) ἄρα τȣ̃ ὑπὸ βαη πρὸς τὸ ὑπὸ αγ λόγος ἐςὶ δοθεὶς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. [q]) Κείσθω τῷ ὑπὸ βαη ἴσον τὸ ὑπὸ ζαγ. λοιπὸν ἄρα τȣ̃ ὑπὸ ζαγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, τȣτέςι τῆς ζα πρὸς τὴν αγ, ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βδ πρὸς τὴν δγ. Παράλληλος ἄρα ἐςὶν ἡ αδ τῇ ζβ. ἴση ἄρα ἐςὶν ἡ ζ γωνία τῇ ἀπὸ γαδ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ζ ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ αηγ γωνίᾳ. καὶ ἡ ὑπὸ αηγ ἄρα γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γαδ γωνίᾳ. Μείζων ἐςὶν ἡ ἀπὸ αδθ τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τῆς ὑπὸ γηα ἄρα μείζων ἐςὶν ἡ ὑπὸ

l) Mſ. τὸ. m) Mſ. δβ. n) εδ.
o) βδγ. p) λοιπὸν. q) αγ.

ὑπὸ αβθ γωνία. ὥςε μεῖζόν ἐςι τὸ ὑπὸ δβγ τοῦ ὑπὸ αβη, τουτέςι τοῦ ε τοῦ δοθέντος χωρίου.

Εἰς τὸν τρίτον τόπον.

Fig. 4.

δ) Τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ διαχθῇ τὶς ἡ αδ δίχα τέμνουσα τὴν βγ. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ τετράγωνα διπλάσιά ἐςι τῶν ἀπὸ τῶν αδ δγ τετραγώνων. Ἤχθω κάθετος ἡ αε. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε r) εγ τετράγωνα διπλάσιά ἐςι τῶν ἀπὸ τῶν βδ εδ τετραγώνων. Ἐςὶ δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ αε μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ δε διπλάσιον τοῦ ἀπὸ αδ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν βε εγ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ αε ἴσα ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ. Τὰ ἄρα ἀπὸ βα αγ διπλάσιά ἐςι τῶν ἀπὸ s) βδ αδ τετραγώνων, τουτέςι τῶν ἀπὸ γδ αδ τετραγώνων.

Fig. 5.

ε) Λόγου ὄντος τοῦ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ t) καὶ χωρίου τοῦ ὑπὸ τῶν γα αδ. ἐὰν τῶν δβ βγ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ βε, δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ αε τοῦ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐςι τῷ ὑπὸ γα αδ, ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἄλλη τὶς ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. Ἀνάλογον ἄρα ἐςὶ κατὰ διαίρεσιν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ζγ πρὸς τὴν γε. Καὶ ὅλη ἄρα ἡ αζ πρὸς ὅλην τὴν βε ἐςὶν, ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν βγ. Ἐναλλὰξ ἄρα ἐςὶν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἐςὶν ἡ δε πρὸς τὴν εγ, ἐκ τοῦ εἶναι μέσην ἀνάλογον. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ εδ πρὸς

r) ἀπὸ τῶν αε εγ.
s) τῶν ἀπὸ αδ δα τετραγώνων, τουτέςι τῶν ἀπὸ γδ εα τετραγώνων.
t) βδ.

πρὸς τὴν γε. Χωρίον χωρίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αζ εγ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ αγ δε. Τὸ δὲ [u]) ὑπὸ αζ γε τῶ ὑπὸ αεγ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ζεγ. Ὧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ αγ δε τῶ ὑπὸ αεγ, τέτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ αε τῶ ὑπὸ δαγ. [v]) Τὸ ἄρα ἀπὸ αε τετράγωνον τῶ ὑπὸ γαδ μεῖζόν ἐςι τῷ ὑπὸ ζεγ [x]) λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τὸν αὐτόν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. ὥςε τὸ ἀπὸ αε τῶ ἀπὸ εγ μεῖζόν ἐςι τῷ ὑπὸ γαδ, ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ.

Fig. 6.

ϛ) Λόγος τῆς αβ πρὸς τὴν βγ, χωρίον τὸ ὑπὸ γαδ, ἐὰν τῶν δβ βγ [y]) μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ βε, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αε τῶ ἀπὸ τῆς εγ μεῖζόν ἐςι τῷ ὑπὸ γαδ [z]) ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, ἕτως ἄλλη τὶς [a]) ἡ ζε πρὸς τὴν εγ. Διελόντι ἄρα καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπὴν ἐςιν ὡς ἡ ζα [b]) πρὸς τὴν βε ἕτως ἡ αγ πρὸς τὴν βγ. ἐναλλὰξ ἐςιν ὡς ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ἕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. Ὡς δὲ ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, ἕτως καὶ ἡ εδ πρὸς τὴν εγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αγ, ἕτως ἡ εδ [c]) πρὸς τὴν γε. Χωρίον χωρίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζα γε ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ αγ δε. [d]) Κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ αεγ [e]) μετὰ τῶ ὑπὸ γαδ. ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ αε [f]) ἴσον ἐςὶν ὅλῳ τῷ τε ὑπὸ ζεγ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ γαδ. ὥςε τὸ ἀπὸ αε [g]) τῶ ἀπὸ εγ μεῖζον τῷ ὑπὸ γαδ εἰ ἐν λόγῳ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. τὸ γὰρ ὑπὸ ζεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τῶτον ἔχει τὸν λόγον.

Fig.

u) τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ αζ γε. v) τῶ ὑπὸ δεγ.
x) τῷ ὑπὸ ζε. λόγον ἔχον τὸ ἀπὸ εγ τὸν αὐτόν.
y) δα αβ. z) τῷ ὑπὸ βαδ.
a) ἄλλη τὶς ἡ εγ πρὸς τὴν γβ. b) ὡς ἡ ζγ πρὸς τὴν γε.
c) ἕτως ἡ δγ. d) τῷ ὑπὸ εδγ.
e) τὸ ὑπὸ αδγ. f) τὸ ἀπὸ δε.
g) τὸ ἀπὸ δε.

Fig. 7.

ζ) Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ γ, δ. ὅτι τὸ ἀπὸ αδ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν βγ h) συντεθήσεται, γίνεται τό τε ἀπὸ αγ, καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ, καὶ ἔτι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βγ. Τῷ i) γὰρ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ζδ πρὸς τὴν δβ. καὶ συντεθήσεται ἄρα, καὶ τὰ λοιπά· ἡ αζ πρὸς λοιπὴν τὴν γδ, τυτέςι τὸ ὑπὸ αζ γδ πρὸς τὸ ὑπὸ γδ ἐςὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ. Ὥςε τὸ μὲν λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν βγ ἔςι τὸ ὑπὸ ζδβ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ ἐςὶ τὸ ὑπὸ αγβ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αὐτῆς αβ πρὸς τὴν βγ ἐςὶ τὸ ὑπὸ αζ δγ. Ὅτι ἐν τὸ ἀπὸ αδ μετὰ τῦ ὑπὸ ζδβ k) ἴσον ἐςὶ τῷ τε ὑπὸ βαγ, καὶ τῷ ὑπὸ αζ γδ. Καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ δαγ. Ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ αδγ μετὰ τῦ ὑπὸ ζδβ ἴσον ἐςὶ τῷ τε ὑπὸ αγ δβ, καὶ τῷ ὑπὸ αζ γδ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ αζ γδ. Ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ζδγ l) μετὰ τῦ ὑπὸ ζδβ m) (γίνεται ὅλον τὸ ὑπὸ ζδ γβ) ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ αγ δβ. Ἔςι δέ. ἀνάλογον γὰρ αἱ αγ, γβ, ζδ, δβ n) εἰσὶν εὐθεῖαι.

Fig. 8.

η) Θέσει καὶ μεγέθει o) εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τυχὸν τὸ γ· ὅτι ἐςὶ δοθὲν ἐπὶ τῆς αβ, ὥςε τὸ ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ δοθέντα p) ἴσον

h) πρὸς τὴν γδ.
i) τῷ γὰρ τῆς αγ πρὸς τὴν γβ λόγον ἔχον ὁ αὐτός.
k) δγζ. l) ζαγ. m) ζδ βα.
n) αβ. o) Θέσει εὐθεῖα ἡ αβ. p) δοθέν.

ἴσον ἐςὶ δοθέντι [q]) καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ γ [r]) δοθέντος. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ἡ αδ πρὸς τὴν δβ. λόγος ἄρα καὶ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ δοθείς. ὥςε δοθέν ἐςι τὸ δ σημεῖον. Ἐπεὶ δὲ εὐθεῖά ἐςιν ἡ αβ, καὶ δύο σημεῖα τὰ δ, γ· τὸ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, ἴσον ἐςὶ τῷ τε ἀπὸ αδ, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ δβ [s]) τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, καὶ [t]) ἔτι τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ. Τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ δβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ τὸ ὑπὸ αδβ. Τὸ ἄρα ἀπὸ αγ, καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ γβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αδ πρὸς τὴν δβ, τουτέςι [u]) δοθέντα, ἴσον ἐςὶ τῷ τε ὑπὸ βαδ, τουτέςι δοθέντι, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ γδ [v]) τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, τουτέςι δοθέντα. [x]) Ὁμοίως καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν τὸ γ ἐκτὸς ᾖ τῆς αβ εὐθείας, τῇ αὐτῇ ἀκολουθίᾳ δείξομεν.

q) δοθέν. r) καὶ τοῦ ὑπὸ γδ δοθέντος. s) αβ.

t) καὶ ἐν τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ αβ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ αγ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν βδ. τὸ ὑπὸ αδβ. τὸ ἄρα ἀπὸ αγ u. ſ. w.

u) τουτέςι τῷ τε ὑπὸ βαδ. v) αγ.

x) δοθέν.

Ebene

Ebene Oerter. 2 Bücher.

Von den Oertern überhaupt sind einige ἐφεκτικοὶ (gleichsam an einer einzigen Stelle anhängende), in diesem Sinn sagt Apollonius vor seinen Elementen, der Ort eines Punkts seye ein Punkt, der Ort einer Linie eine Linie, einer Oberfläche eine Oberfläche, eines Körpers ein Körper; andere sind διεξοδικοὶ (fortschreitende), wenn nemlich der Ort eines Punkts eine Linie, der Ort einer Linie eine Oberfläche, der Ort einer Oberfläche ein Körper ist; noch andere sind ἀναστροφικοὶ (doppelt fortbewegte), wenn der Ort eines Punkts eine Oberfläche, der Ort einer Linie ein Körper ist. Von den Oertern nun, die in den analytischen Büchern vorkommen, sind die von den der Lage nach gegebenen Stüken ἐφεκτικοὶ; diejenige, die man ebene Oerter nennt, und eben so die Kegelschnitte und übrige krumme Linien oder sogenannte Loci solidi und lineares sind διεξοδικοὶ von Punkten; endlich sind die Oerter an der Oberfläche (aus denen übrigens auch die loci lineares bewiesen werden) ἀναστροφικοὶ von Punkten, und διεξοδικοὶ von Linien. Man nennt nemlich ebene Oerter*) diejenigen, von

B 2 welchen

*) Um Anfängern diß desto verständlicher zu machen, wird es nicht unnüzlich seyn, folgende zwey Beyspiele von sehr einfachen ebenen Oertern anzuführen: denn die Oerter an den Kegelschnitten, und die übrigen gehören nicht zu dem gegenwärtigen Zwek. Es sey also (Fig. 9.) eine Linie A B

welchen hier die Rede ist, und diese sind überhaupt gerade Linien, oder Kreis-Linien. Loci solidi heissen alle

AB der Lage nach, und auf derselben ein Punkt A gegeben; wenn nun innerhalb des rechten Winkels HAB, oder seines Scheitel-Winkels KAL irgend eine gerade Linie CD senkrecht auf AB gezogen, und dadurch ein Stük CA abgeschnitten wird, dessen einer Endpunkt A ist; so ist offenbahr, daß auf der geraden Linie CD ein Punkt E genommen werden kann, so, daß EC zu CA jedes gegebene Verhältniß habe, z. B. daß EC doppelt so groß seye als CA. Es können aber unzählich viele gerade Linien senkrecht auf AB gezogen werden, und auf jeder derselben wird ein Punkt seyn, der eben das leistet, was der Punkt E, d. i. dessen Entfernung von AB doppelt so groß ist, als das Stük, das diese senkrecht auf AB gezogene gerade Linie zwischen sich und dem Punkt A abschneidet. Man sieht auch, daß, wenn man die Linie AE zieht, und nach beyden Seiten hin verlängert, jeder auf ihr gelegene Punkt, z. B. der Punkt F eben das leiste, was der Punkt E, d. i. daß, wenn man FG senkrecht auf AB zieht, FG doppelt so groß seye, als GA, weil sich FG zu GA verhält, wie EC zu CA; und daß kein Punkt, der nicht auf der geraden Linie AE liegt, innerhalb der benannten Winkel dasselbe leisten könne. Weil also alle diese Punkte auf der geraden Linie AE liegen, so heißt diese ganz eigentlich der Ort dieser Punkte. Eben so, wenn auf die der Lage und Größe nach gegebene Linie AB die Linie CE senkrecht gezogen wird; so sieht man leicht, daß auf dieser ein Punkt D gefunden werden könne, so daß das Quadrat über DC gleich sey dem Rechtek ACB, das zwischen den Stüken von AB enthalten ist; und auf ähnliche Art wird man auf jeder auf AB senkrecht gezogenen Linie einen Punkt finden können, der das nemliche leistet. Beschreibt man nun über AB als Durchmesser einen Kreis; so erhellet aus der Natur des Kreises, daß jeder auf dem Umfang dieses Kreises liegende Punkt, z. B. F, und keiner innerhalb oder ausserhalb des Kreises das nemliche leiste, was der Punkt D. Mithin heißt dieser Umfang mit Recht der Ort aller dieser Punkte. Wäre verlangt, einen Punkt zu finden, der diese beyden Eigenschaften habe, d. i. so beschaffen sey, daß ein von ihm auf AB gefälltes Per-

alle Kegelschnitte, nemlich die Parabeln, oder Ellipsen, oder Hyperbeln; loci lineares endlich alle Linien, die weder gerade, noch Kreis=Linien, noch Kegelschnitte sind. Diejenigen Oerter, die von Eratosthenes loci ad Medietates genannt werden, gehören ihrer Klasse nach auch unter die vorhin angeführten, und sind nur durch die eigenen dabey vorkommenden Bedingungen davon unterschieden.

Die Alten nun trugen ihre Lehren von diesen ebenen Oertern in Rüksicht auf eine gewisse Ordnung vor, welche aber die spätern Geometer vernachlässigten, und noch andere Oerter beyfügten, ohne zu bedenken, daß es eine unzählige Menge Oerter gebe, wenn man auch solche darzu nehmen will, die nicht in dieser Ordnung enthalten sind. Ich will also die später angehängten zulezt anführen, und diejenigen, welche einer gewissen Ordnung folgen, voranschiken, und sie in folgenden einzigen Saz zusammenfassen.

Wenn aus einem, oder aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder Stüke einer und ebenderselben geraden Linie sind, oder einander gleichlaufen, oder einen gegebenen Winkel einschliessen, und wenn überdiß diese zwey Linien entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder ein

Perpendikel doppelt so groß sey, als das zwischen diesem Perpendikel und dem Punkt A abgeschnittene Stük, und daß das Quadrat dieses Perpendikels gleich sey dem Rchtk, das zwischen den Stüken enthalten ist, die zwischen diesem Perpendikel und den Punkten A und B liegen; so sieht man leicht, daß dieser Punkt wegen der ersten Bedingung nothwendig auf der geraden Linie AE, und wegen der zweyten nothwendig auf dem über dem Durchmesser AB beschriebenen Kreis liegen müsse, daß er also in ihrem Durchschnitts=Punkt F gefunden werde. Und aus diesem Beyspiel erhellet, wie die Lehre von den Oertern zu der Auflösung der Aufgaben diene.

gegebenes Rechtek einschliessen; und wenn endlich der Endpunkt der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berührt: so wird auch der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berühren; und zwar manchmahl einen Ort von der nemlichen, manchmahl einen von verschiedener Gattung; manchmahl einen Ort, dessen Lage in Bezug auf die gerade Linie mit dem ersten Ort ähnlich — manchmahl einen, dessen Lage in Bezug auf diese Linie mit dem ersten Ort nicht ähnlich ist. Diß hängt nemlich von den verschiedenen Bedingungen ab.

Hieher gehören noch folgende drey von Charmander (den Oertern des Apollonius) vorangeschikte Säze:

Wenn der eine Endpunkt einer der Größe nach gegebenen geraden Linie gegeben ist; so berührt der andere Endpunkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Umkreises.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien, die einen gegebenen Winkel einschliessen, gezogen werden; so berührt ihr Durchschnitts-Punkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Kreises.

Wenn die Grundlinie eines der Größe nach gegebenen Dreyecks der Lage und Größe nach gegeben ist; so berührt der Scheitelpunkt des Dreyecks eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die übrigen Säze sind folgende:

Wenn der eine Endpunkt einer der Größe nach gegebenen geraden Linie, die mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauft, eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt auch der andere Endpunkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Wenn aus einem Punkt an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien, die entweder gleichlaufen, oder zusammenstossen, unter gegebenen Winkeln zwey gerade

Linien

Linien gezogen werden, welche entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder bey welchen die Summe der einen, und einer dritten Linie, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist: so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Und wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach gegeben ist, und an jede derselben gerade Linien aus einem Punkt gezogen werden, und (z. B. in dem Fall von 3 geraden Linien) die Summe des Rechteks, das zwischen einer gegebenen Linie, und einer der gezogenen Linien enthalten ist, und eines andern Rechteks, das zwischen einer gegebenen Linie, und einer andern der gezogenen Linien enthalten ist, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen Linie, und der dritten der gezogenen Linien enthalten ist; und so weiter fort bey den übrigen Fällen; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Wenn aus einem Punkt an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien unter gegebenen Winkeln zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder auf den Parallel-Linien zwischen sich und gegebenen Punkten Stüke abschneiden, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; oder einen gegebenen Raum einschliessen; oder so beschaffen sind, daß die Summe, oder der Unterschied von geraden, der Gattung nach gegebenen, über ihnen beschriebenen Figuren gegeben ist: so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. *)

 Das

*) Dieser Paragraph ist in dem griechischen Text fehlerhaft; deßwegen verwarf Fermat seine 3 lezten Bedingungen als unrichtig, und unterschoben; er hätte aber nur die zweyte verwerfen sollen. Mit geringer (oben angegebener) Veränderung wird aber alles richtig. Schooten hat hierinn den Sinn des Pappus ganz gut erklärt.

Das zweyte Buch enthält folgendes:

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und der Unterschied der über ihnen beschriebenen Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt ihr Durchschnitts-Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Haben aber die gezogenen Linien ein gegebenes Verhältniß unter einander; so berührt ihr Durchschnitts-Punkt entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn eine gerade Linie der Lage nach, und auf derselben ein Punkt gegeben ist, aus dem eine endliche gerade Linie gezogen wird; wenn dann aus dem Endpunkt dieser gezogenen Linie ein Perpendikel auf die der Lage nach gegebene gerade Linie gefällt wird, und das Quadrat der (zuerst) gezogenen Linie gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und dem Stük der der Lage nach gegebenen geraden Linie, welches zwischen dem Perpendikel und dem gegebenen Punkt, oder zwischen dem Perpendikel und einem andern gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und der Ueberschuß des Quadrats der einen über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt ihr Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte an Einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der gemeinschaftliche

Durch-

Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten gerade Linien an einen Punkt hingezogen werden, und aus diesem Durchschnitts-Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlaufend gezogen wird, und diese auf einer der Lage nach gegebenen Linie zwischen sich und einem gegebenen Punkt ein Stük abschneidet, und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen Linien beschrieben sind, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen Linie, und dem abgeschnittenen Stük enthalten ist: so berührt der Durchschnitts-Punkt (jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien) einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch diesen Punkt irgend eine gerade Linie zieht, und auf derselben einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und wenn entweder das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks allein, oder die Summe dieses Quadrats, und des zwischen den beyden innern Stüken enthaltenen Rechteks gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen der ganzen Linie, und zwischen dem äussern durch den Kreis abgeschnittenen Stük: so berührt der ausserhalb des Kreises genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Und *) wenn dieser Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt, der Kreis aber nicht als

*) Dieser lezte Saz ist sicher verstümmelt, denn aus den in demselben gegebenen Stüken wird man nicht beweisen können, daß die Punkte einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühren. Ihn wiederherzustellen, muß noch hinzugesezt werden: und wenn das Rechtek gegeben ist, das ent-

gegeben vorausgesezt wird: so berühren die zu beyden Seiten des gegebenen Punkts angenommenen Punkte einen und ebendenselben der Lage nach gegebenen Umkreis.

Uebrigens enthalten die beyden Bücher der ebenen Oerter 147 Säze oder Figuren, und acht Lehnsäze.

Diß sind also die Säze, die ich nebst ihren besondern Fällen und Bestimmungen, und den zugehörigen Lehnsäzen nach der den Alten gewöhnlichen analytischen und synthetischen Methode wiederherzustellen mich bestrebt habe. „Ἐμοὶ γὰρ τι τῶν μὴ εὑρημένων ἐξευρίσκειν, ὅ, τι καὶ εὑρεθὲν κρέσσον ἢ ἀνεξεύρετον, ξυνέσιος δοκέει ἐπιθύμημά τε καὶ ἔργον εἶναι, καὶ τὸ τὰ ἡμιέργα ἐς τέλος ἐξεργάζεσθαι ὡσαύτως." Hippokrates im Buch von der Kunst.

Pappus Lehnsäze zu den Büchern von den ebenen Oertern.

Zum ersten Ort des zweyten Buchs.

Fig. 1.

1) Es seye ein Dreyeck $\alpha\beta\gamma$, und eine Linie $\alpha\delta$ seye so gezogen, daß $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$ sich verhält, wie das Quadrat

enthalten ist zwischen den Stüken, welche zwischen den zwey Punkten, und dem gegebenen Punkt abgeschnitten sind, und wenn das Quadrat des zwischen dem gegebenen Punkt, und der der Lage nach gegebenen geraden Linie abgeschnittenen Stüks, entweder allein, oder die Summe dieses Quadrats, und des angeführten gegebenen Rechteks gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen den Stüken, welche zwischen der der Lage nach gegebenen geraden Linie, und den genommenen Punkten abgeschnitten sind.

Fermat, welcher meynt, dieser lezte Saz, so wie er bey Pappus ist, könne auf ähnliche Art, wie der vorlezte, erwiesen werden, scheint ihn nicht untersucht zu haben. Uebrigens schien mirs nicht der Mühe werth zu seyn, ihm unter Apollonius Säzen einen Plaz zu geben, ungeachtet er jezt verbessert leicht erwiesen werden kann.

Quadrat von $\alpha\beta$ zu dem Quadrat von $\alpha\gamma$: zu zeigen, daß das Rechtek $\beta\delta\times\delta\gamma$ gleich seye dem Quadrat von $\alpha\delta$. Man ziehe durch den Punkt γ die Linie $\gamma\varepsilon$ gleichlaufend mit $\alpha\beta$; so ist, wie $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$, so $\alpha\beta$ zu $\gamma\varepsilon$, und eben so das Quadrat von $\alpha\beta$ zu dem Rechtek $\alpha\beta\times\gamma\varepsilon$. Aber es war auch, wie $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$, so das Quadrat von $\alpha\beta$ zu dem Quadrat von $\alpha\gamma$. Folglich ist das Rchtk $\alpha\beta\times\gamma\varepsilon$ gleich dem Quadrat von $\alpha\gamma$. Mithin sind (in den Dreyecken $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\varepsilon$) die Seiten, welche die gleiche Wechsels-Winkel einschliessen, proportionirt. Folglich ist der Winkel $\gamma\alpha\delta$ gleich dem Winkel β. Mithin ist das Rchtk $\beta\delta\times\delta\gamma$ gleich dem Quadrat von $\alpha\delta$. Eben so wird nun auch leicht der Beweis für den umgekehrten Saz geführt.

Zum zweyten Ort.

Fig. 2.

2) Es seye ein Dreyeck $\alpha\beta\gamma$, und $\delta\alpha$ das Perpendikel auf die Grundlinie, zu zeigen, daß der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\alpha$ über das Quadrat von $\alpha\gamma$ gleich sey dem Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das Quadrat von $\delta\gamma$. Und, wenn $\beta\gamma$ in ε in zwey gleiche Theile getheilt ist, zu zeigen, daß der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das Quadrat von $\delta\gamma$ gleich sey dem doppelten Rchtk zwischen $\beta\gamma$ und $\varepsilon\delta$. Daß erstlich der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\beta$ über das von $\alpha\gamma$ gleich sey dem Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das von $\delta\gamma$, erhellet leicht. Denn das Quadrat von $\alpha\beta$ ist gleich der Summe der Quadrate von $\beta\delta$ und $\alpha\delta$, und das Quadrat von $\alpha\gamma$ gleich der Summe der Quadrate von $\alpha\delta$ und $\delta\gamma$. Der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\beta$ über das Quadrat von $\alpha\gamma$ ist also gleich dem Ueberschuß der Summe der Quadrate von $\beta\delta$ und $\alpha\delta$ über die Summe der Quadrate von $\alpha\delta$ und $\delta\gamma$. Man nehme das Quadrat von $\alpha\delta$ hin-

hinweg; so ist folglich der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das Quadrat von $\delta\gamma$ gleich dem Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\beta$ über das Quadrat von $\alpha\gamma$. Es ist aber der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das Quadrat von $\delta\gamma$ gleich dem doppelten Rchtk zwischen $\beta\gamma$ und $\varepsilon\delta$; folglich auch der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\beta$ über das Quadrat von $\alpha\gamma$. Daß aber wirklich der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das von $\delta\gamma$ gleich seye dem doppelten Rchtk zwischen $\beta\gamma$ und $\varepsilon\delta$, läßt sich leicht so zeigen. Weil $\beta\varepsilon$ gleich ist $\varepsilon\gamma$; so ist $\beta\delta$ gleich der Summe von $\gamma\varepsilon$ und $\varepsilon\delta$, mithin das Quadrat von $\beta\delta$ gleich dem Quadrat, das über $\gamma\varepsilon$ und $\varepsilon\delta$ als einer Linie beschrieben werden kann. Aber der Ueberschuß dieses über $\gamma\varepsilon$ und $\varepsilon\delta$ als einer Linie beschriebenen Quadrats über das Quadrat von $\gamma\delta$ ist gleich dem vierfachen Rchtk zwischen $\gamma\varepsilon$ und $\varepsilon\delta$, das heißt, dem doppelten Rchtk zwischen $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon$. Mithin ist der Ueberschuß des Quadrats von $\beta\delta$ über das Quadrat von $\delta\gamma$ gleich dem doppelten Rchtk zwischen $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon$.

Zu ebendemselben Ort, wenn nicht das Verhältniß der Gleichheit Statt findet.

Fig. 3.

3) Es seye ein Dreyek $\alpha\beta\gamma$, und der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\beta$ über einen gegebenen Raum habe zu dem Quadrat von $\alpha\gamma$ ein gegebenes Verhältniß (dieser gegebene Raum seye ε, das gegebene Verhältniß aber das Verhältniß von $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$): zu zeigen, daß das Rchtk $\delta\beta\gamma$ grösser sey, als der gegebene Raum ε. Man mache das Rchtk $\alpha\beta\eta$ gleich dem gegebenen Raum, und nehme es von dem Quadrat von $\alpha\beta$ hinweg; so ist der Rest, nemlich das Rchtk $\beta\alpha\eta$ zu dem Quadrat von $\alpha\gamma$ in dem gegebenen Verhältniß von $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$. Man mache $\zeta\alpha \times \alpha\gamma$ gleich $\beta\alpha \times \alpha\eta$; so bleibt folglich das Verhält-

hältniß des Rchtks $\zeta\alpha\gamma$ zu dem Quadrat von $\alpha\gamma$, d. h. der Linie $\zeta\alpha$ zu der Linie $\alpha\gamma$ das nemliche mit dem Verhältniß der Linie $\beta\delta$ zu $\delta\gamma$. Folglich ist $\alpha\delta$ mit $\zeta\beta$ gleichlaufend. Mithin der Winkel ζ gleich dem Winkel $\gamma\alpha\delta$. Aber der Winkel ζ ist gleich dem Winkel $\alpha\eta\gamma$. Folglich der Winkel $\alpha\eta\gamma$ gleich dem Winkel $\gamma\alpha\delta$. Nun ist der Winkel $\alpha\delta\vartheta$ grösser als der Winkel $\gamma\alpha\delta$, mithin auch grösser als der Winkel $\alpha\eta\gamma$. Mithin ist das Rchtk $\delta\beta\gamma$ grösser als das Rchtk $\alpha\beta\eta$, d. h. grösser, als der gegebene Raum ε.

Zum dritten Ort.

Fig. 4.

4) Es seye ein Dreyek $\alpha\beta\gamma$, und es sey eine gerade Linie $\alpha\delta$ gezogen, welche die Grundlinie $\beta\gamma$ in zwey gleiche Theile theilt; zu zeigen, daß die Summe der Quadrate über $\beta\alpha$ und $\alpha\gamma$ gleich sey der doppelten Summe der Quadrate über $\alpha\delta$ und $\delta\gamma$. Man fälle das Perpendikel $\alpha\varepsilon$. Nun ist die Summe der Quadrate über $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\gamma$ gleich der doppelten Summe der Quadrate über $\beta\delta$ und $\varepsilon\delta$. Es ist ferner das doppelte des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ nebst dem doppelten des Quadrats von $\varepsilon\delta$ gleich dem doppelten des Quadrats von $\alpha\delta$. Und die Summe der Quadrate über $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\gamma$, und des doppelten Quadrats über $\alpha\varepsilon$ ist gleich der Summe der Quadrate über $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$. Folglich ist die Summe der Quadrate über $\alpha\beta$, und $\alpha\gamma$ gleich der doppelten Summe der Quadrate über $\beta\delta$ und $\alpha\delta$, d. h. der Quadrate über $\gamma\delta$ und $\alpha\delta$.

Fig. 5.

5) Wenn $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ irgend ein Verhältniß, und das Rchtk $\gamma\alpha\delta$ irgend einen Raum vorstellt, und man nimmt zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$ die mittlere Proportionallinie $\beta\varepsilon$; zu zeigen, daß der Ueberschuß des Quadrats von

von $\alpha\varepsilon$ über das Rchtk $\gamma\alpha\times\alpha\delta$ zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$ das Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ habe. Denn, man nehme, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$, so eine andere Linie $\zeta\varepsilon$ zu $\varepsilon\gamma$. Folglich ist getheilt $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$, wie $\zeta\gamma$ zu $\varepsilon\gamma$. Mithin auch die ganze Linie $\alpha\zeta$ zu der ganzen Linie $\beta\varepsilon$, wie $\alpha\gamma$ zu $\beta\gamma$. Mithin verwechselt $\zeta\alpha$ zu $\alpha\gamma$, wie $\varepsilon\beta$ zu $\beta\gamma$. Aber, wie $\varepsilon\beta$ zu $\beta\gamma$, so $\delta\varepsilon$ zu $\varepsilon\gamma$, weil nemlich $\varepsilon\beta$ die mittlere Proportional-Linie ist zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$. Folglich ist, wie $\zeta\alpha$ zu $\alpha\gamma$, so $\varepsilon\delta$ zu $\gamma\varepsilon$. Und, da das Rchtk der äussern Glieder gleich ist dem Rchtk der mittlern, so ist folglich das Rchtk $\alpha\zeta\times\varepsilon\gamma$ gleich dem Rchtk $\alpha\gamma\times\delta\varepsilon$. Es ist aber der Ueberschuß des Rchtks $\alpha\zeta\times\varepsilon\gamma$ über das Rchtk $\alpha\varepsilon\gamma$ gleich dem Rchtk $\zeta\varepsilon\gamma$. Nun ist der Ueberschuß des Rchtks $\alpha\gamma\times\delta\varepsilon$ über das Rchtk $\alpha\varepsilon\gamma$ gleich dem Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ über das Rchtk $\delta\alpha\gamma$. Mithin ist der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ über das Rchtk $\delta\alpha\gamma$ gleich dem Rchtk $\zeta\varepsilon\gamma$, welches leztere zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$ das Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ hat. Folglich ist der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ über das Rchtk $\gamma\alpha\delta$ zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$ in dem Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$.

Fig. 6.

6) Es seye $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ ein gewisses Verhältniß, das Rchtk $\gamma\alpha\delta$ ein gewisser Raum, und $\beta\varepsilon$ die mittlere Proportional-Linie zwischen $\delta\beta$ und $\beta\gamma$; zu zeigen, daß der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\varepsilon$ über das Rchtk $\gamma\alpha\delta$ zu dem Quadrat von $\varepsilon\gamma$ das Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$ habe. Denn man nehme, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$, so eine andere Linie $\zeta\varepsilon$ zu $\varepsilon\gamma$. Folglich ist, getheilt, und den Rest zum Rest genommen (d. h. 17, 5. und 19, 5. E.) wie $\zeta\alpha$ zu $\varepsilon\beta$, so $\alpha\gamma$ zu $\beta\gamma$. Mithin verwechselt $\zeta\alpha$ zu $\alpha\gamma$, wie $\varepsilon\beta$ zu $\beta\gamma$. Aber, wie $\varepsilon\beta$ zu $\beta\gamma$, so $\varepsilon\delta$ zu $\varepsilon\gamma$. Folglich $\zeta\alpha$ zu $\alpha\gamma$, wie $\varepsilon\delta$ zu $\varepsilon\gamma$. Nun ist das Rchtk der äussern Glieder gleich dem Rchtk der mittlern. Mithin

hin das Rchtk $\zeta\alpha\times\gamma\epsilon$ gleich dem Rchtk $\alpha\gamma\times\delta\epsilon$. Man seze beederseits das Rchtk $\alpha\epsilon\gamma$ nebst dem Rchtk $\gamma\alpha\delta$ hinzu; so ist mithin die Summe einerseits, d. h. das Quadrat von $\alpha\epsilon$ gleich der Summe andernseits, d. h. dem Rchtk $\zeta\epsilon\gamma$ nebst dem Rchtk $\gamma\alpha\delta$. Folglich ist der Ueberschuß des Quadrats von $\alpha\epsilon$ über das Rchtk $\gamma\alpha\delta$ zu dem Quadrat von $\epsilon\gamma$ in dem Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Denn diß Verhältniß hat das Rchtk $\zeta\epsilon\gamma$ zu dem Quadrat von $\epsilon\gamma$.

Fig. 7.

7) Es seye eine gerade Linie $\alpha\beta$, und auf derselben 2 Punkte γ, δ. Man nehme das Quadrat von $\alpha\delta$, und einen Raum, der sich zu dem Quadrat von $\beta\delta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\beta\gamma$, zusammen, und man wird erhalten das Quadrat von $\alpha\gamma$, einen Raum, der sich zum Quadrat von $\gamma\beta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$, und noch einen andern Raum, der sich zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Denn man nehme $\zeta\delta$ zu $\delta\beta$, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$; so ist folglich, zusammengesezt, und den Rest zum Rest genommen, (d. h. 18, 5. und 19, 5. E.) $\alpha\zeta$ zu $\gamma\delta$, d. h. das Rchtk $\alpha\zeta\times\gamma\delta$ zu dem Quadrat von $\gamma\delta$, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Mithin ist zuvörderst das Rchtk $\zeta\delta\beta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\gamma$ zu $\gamma\beta$. Ferner ist das Rchtk $\alpha\gamma\beta$ der Raum, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ das angezeigte Verhältniß hat. Endlich ist das Rchtk $\alpha\zeta\times\delta\gamma$ der Raum, der sich zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\gamma$. Es soll also gezeigt werden, daß die Summe des Quadrats von $\alpha\delta$ und des Rchtks $\zeta\delta\beta$ gleich sey der Summe des Rchtks $\beta\alpha\gamma$, und des Rchtks $\alpha\zeta\times\gamma\delta$. Man nehme beederseits das Rchtk $\delta\alpha\gamma$ hinweg; so ist zu erweisen, daß die Summe des Rchtks $\alpha\delta\gamma$ und des Rchtks $\zeta\delta\beta$ gleich sey der Summe des Rchtks $\alpha\gamma\times\delta\beta$, und des Rchtks $\alpha\zeta\times\gamma\delta$ Man nehme noch das Rchtk $\alpha\zeta\times\gamma\delta$ hinweg; so ist zu zeigen, daß die

die Summe des Rchtks $\zeta\delta\gamma$ und $\zeta\delta\beta$ (d. h. daß das Rchtk $\zeta\delta\times\gamma\beta$) gleich sey dem Rchtk $\alpha\gamma\times\delta\beta$. Diß ist aber so, weil $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\zeta\delta$, $\delta\beta$ proportional sind.

Fig. 8.

8) Es sey $\alpha\beta$ der Lage und Größe nach, und auf ihr irgend ein Punkt γ gegeben; zu zeigen, daß auf $\alpha\beta$ ein Punkt (δ) gegeben ist, so, daß das Quadrat von $\alpha\gamma$, und ein Raum, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ ein gegebenes Verhältniß hat, gleich sey der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der ein gegebenes Verhältniß hat zu dem Quadrat der Linie, welche zwischen dem gegebenen Punkt (δ) und dem gegebenen Punkt γ abgeschnitten ist. Denn man nehme $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$ in dem gegebenen Verhältniß; so ist folglich das Verhältniß von $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$ gegeben, mithin der Punkt δ gegeben. Weil nun $\alpha\beta$ eine gerade Linie, und γ, δ 2 Punkte auf ihr sind; so ist die Summe des Quadrats von $\alpha\gamma$, und eines Raums, der sich zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, gleich der Summe des Quadrats von $\alpha\delta$, eines Raums, der sich zum Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat von $\gamma\delta$ verhält, wie $\alpha\beta$ zu $\beta\delta$. Nun ist das Rchtk $\alpha\delta\beta$ der Raum, der sich zu dem Quadrat von $\delta\beta$ verhält, wie $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$. Folglich ist die Summe des Quadrats von $\alpha\gamma$, und eines Raums, der zu dem Quadrat von $\gamma\beta$ das Verhältniß von $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe des Rchtks $\beta\alpha\delta$ d. h. eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat von $\gamma\delta$ das Verhältniß von $\alpha\beta$ zu $\beta\delta$, d. h. ein gegebenes Verhältniß hat. Auf ähnliche Art wird der Saz noch erwiesen, wenn der gegebene Punkt γ ausserhalb der Linie $\alpha\beta$ liegt.

Apollo.

Apollonius von Pergen

ebene Oerter.

Erstes Buch.

1. Saz.

Von Charmander.

Wenn der eine Endpunkt einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie gegeben ist; so berührt der andere Endpunkt die hole Seite eines der Lage nach gegebenen Kreis-Umfangs.

Fig. 10.

Es sey die Linie AB der Grösse nach, und auf derselben der Punkt A gegeben; so ist ein aus dem Mittelpunkt A mit dem Halbmesser AB beschriebener Kreis der Lage und Grösse nach gegeben (7. Def. D.). Und es erhellet von selbst, daß der Umfang dieses Kreises der Ort sey, auf den der Endpunkt von jeder geraden Linie trift, die aus dem Punkt A gezogen wird und gleich ist AB: so wie umgekehrt jede gerade Linie, die aus dem Punkt A an den Umkreis gezogen wird, gleich ist AB.

2. Saz.

Von Charmander.

Wenn 2 gerade Linien, die einen Winkel von gegebener Grösse einschliessen, durch 2 gegebene Punkte gehen; so liegt der Durchschnitts-Punkt dieser Linien auf einem der Lage nach gegebenen Kreis-Umfang.

Fig. 11.

Die geraden Linien AC, BC, welche den Winkel ACB einschließen, der einem gegebenen Winkel gleich ist, gehen durch die gegebenen Punkte A, B. Um das Dreyek ABC sey ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt D; und man ziehe AD, BD, AB. Weil der Winkel ACB gegeben ist; so ist auch der Winkel ADB gegeben, der als Winkel am Mittelpunkt doppelt so groß ist, als ACB; überdiß ist das Verhältniß von AD zu BD gegeben, weil AD = BD: also ist das Dreyek ADB der Gattung nach gegeben (44. D.): folglich ist das Verhältniß von AB zu AD gegeben (3. Def. D.). Nun ist AB, also auch AD der Grösse nach gegeben (2. D.). Es ist aber AD auch der Lage nach gegeben; weil die Lage von AB und der Punkt A nebst dem Winkel BAD gegeben sind (32. D.); folglich ist der Punkt D gegeben (30. D.): also ist der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DA beschriebene Kreis der Lage und Grösse nach gegeben (7. Def. D.).

Die Komposition ist die nemliche mit der Verzeichnung und dem Beweis des 33sten Sazes im 3ten Buch der Elemente. Man beschreibe nemlich über AB einen Kreis-Abschnitt, der den gegebenen Winkel faßt; so ist dessen Umfang der gesuchte Ort, wie von selbst erhellet.

Berechnung.

In dem Dreyek ADB ist die Seite AB nebst allen Winkeln gegeben, folglich läßt sich AD, der Halbmesser des Kreises, leicht berechnen. Es ist nemlich

$$\left.\begin{matrix}\text{sin. C}\\ \text{sin. tot}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. tot.}\\ \text{cosec C}\end{matrix}\right. = \tfrac{1}{2}\,AB : AD.$$

Verlangt man DE, d. i. das aus dem Mittelpunkt D auf AB gefällte Perpendikel; so hat man

$$\text{sin. tot} : \text{cotg. C} = \tfrac{1}{2}\,AB : DE.$$

3. Saz.

3. Saz.

Von Charmander.

Wenn die Grundlinie eines der Grösse nach gegebenen Dreyeks der Lage und Grösse nach gegeben ist; so liegt der Scheitel-Punkt des Dreyeks auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie.

Fig. 12.

Es sey die gerade Linie AB der Lage und Grösse nach, und das Dreyek ABC der Grösse nach gegeben; so fällt sein Scheitel-Punkt C auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man fälle auf AB das Perpendikel CD, und ergänze das Prllgrm. ADCE. Weil der Flächen-Innhalt des Dreyeks ABC gegeben ist; so ist auch das doppelte davon, also das Rechtek AB × CD, d. i. das Rechtek EAB gegeben; nun ist AB und der Winkel BAE der Grösse nach gegeben; folglich ist AE der Grösse nach (61. D.), aber auch der Lage nach (32. D.) gegeben, also der Punkt E gegeben (30. D.), mithin die gerade Linie EC, auf welcher der Punkt C liegt, der Lage nach gegeben (31. D.).

Komposition.

Ueber der Linie AB beschreibe man das Prllgr. AEFB so, daß der Flächen-Innhalt des Prllgrms. doppelt so groß wird, als der Flächen-Innhalt des Dreyeks. Die Linie EF auf beeden Seiten verlängert wird der gesuchte Ort seyn. Denn wenn man an einen Punkt C dieser Linie, an welchen man will, die Linien AC, BC zieht; so ist immer das Dreyek ACB = $\frac{1}{2}$ Prllgr. AEFB d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Allgemeiner Saz des Pappus; in welchem, wie aus Pappus wahrscheinlich wird, diejenigen Säze des ersten Buchs enthalten sind, die von Apollonius selbst herrühren.

Wenn aus einem oder aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien gezogen werden, welche entweder Stüke einer und eben derselben geraden Linie sind, oder einander gleichlauffen, oder einen gegebenen Winkel einschliessen; wenn überdiß diese zwey Linien entweder ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, oder ein der Grösse nach gegebenes Rechtek einschliessen; und wenn endlich der Endpunkt der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Ort berührt: so wird auch der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen ebenen Ort berühren, dessen Beschaffenheit und Lage in Beziehung auf diese Linie, jede insbesondere, von denen des ersten Orts verschieden seyn können, oder nicht.

4. Saz.

Des Apollonius erster.

Wenn auf einer geraden Linie, von einem auf ihr gegebenen Punkt an, zwey Stüke abgeschnitten werden, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; und der Endpunkt eines dieser Stüke eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt: so berührt auch der Endpunkt des andern Stüks eine der Lage nach gegebene gerade Linie. (Kommt auch in Eukl. Dat. als der 39ste Saz vor.)

Fig. 13. a. b.

Von dem gegebenen Punkt A an werden auf einer geraden Linie die beeden Stüke AB und AC abgeschnitten, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben;

und der Punkt B berühre die der Lage nach gegebene gerade Linie DE: so wird auch der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren.

Man fälle aus dem Punkt A auf die Linie DE das Perpendikel AF, diß wird der Lage nach gegeben seyn (33. D.): weil nun (nach der Voraussezung) auch DE der Lage nach gegeben ist; so ist der Punkt F gegeben (28. D.); folglich AF der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.). Man ziehe durch C die Linie CG gleichlauffend mit DE; so ist AF : AG = AB : AC, also das Verhältniß von AF zu AG gegeben, und, weil AF der Grösse nach gegeben ist; so ist auch AG der Grösse nach gegeben; es ist aber auch die Lage von AG und der Punkt A gegeben, folglich ist der Punkt G (30. D.), mithin die Linie GC, welche der Punkt C berührt, der Lage nach (31. D.) gegeben.

Komposition.

Man fälle auf DE das Perpendikel AF, und nehme auf demselben AG so, daß AG zu AF das gegebene Verhältniß hat; durch den Punkt G ziehe man GH mit DE gleichlauffend: so wird GH der verlangte Ort seyn. Denn, wenn man an DE irgend eine gerade Linie AB zieht, die der Linie GH in C begegnet; so ist AB : AC = AF : AG, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

5. Saz.

Fig. 14. a. b. c. d.

Wenn auf einer geraden Linie, von einem auf ihr gegebenen Punkt A an, zwey Stüke AB, AC abgeschnitten werden, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; und der Endpunkt B eines dieser Stüke den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises

ses berührt: so berührt auch der Endpunkt C des andern Stüks den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises, welcher entweder seine hole oder erhabene Seite gegen die Linie AC kehren wird, je nachdem entweder die hole oder die erhabene Seite des Umfangs, den B berührt, der Linie AB zugekehrt ist.

Denn es sey D der Mittelpunkt des Kreises, dessen Umfang der Punkt B berührt; man ziehe DB, und mit dieser gleichlauffend CE, welche der Linie DA in E begegne. Weil nun DB und EC gleichlauffend sind; so ist $\left.\begin{matrix}AD\\DB\end{matrix}\right\} : \left\}\begin{matrix}AE\\EC\end{matrix}\right. = AB : AC$ (4, 6. E.); also das Verhältniß dieser Linien gegeben. Es ist aber AD der Lage und Grösse nach gegeben, weil die Punkte A, D gegeben sind (29. D.); also ist AE der Grösse nach gegeben (2. D.). Es ist aber auch die Lage von AE, und der Punkt A gegeben, also auch der Punkt E (30. D.); und, weil DB der Grösse nach, und das Verhältniß von DB zu CE gegeben ist, so ist EC der Grösse nach gegeben; es ist aber auch der Punkt E gegeben; also berührt der Punkt C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises. (1. Saz.)

Komposition.

Man ziehe AD, diese Linie begegne dem Kreise, dessen Mittelpunkt D ist, in F, und man nehme AD : AE in dem gegebenen Verhältniß, und in eben diesem auch DF : EG; (man muß aber AE auf eben derselben Seite mit AD, oder auf der entgegengesezten Seite nehmen, je nachdem AC auf einerley, oder auf der entgegengesezten Seite von AB liegen soll, welches aus der Voraussezung zu beurtheilen ist) aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. h. wenn man

man aus dem Punkt A irgend eine Linie AB an den Umkreis, dessen Mittelpunkt D ist, zieht; so wird diese Linie dem Kreis, dessen Mittelpunkt E ist, in einem Punkt C begegnen, und es wird seyn AB : AC = AD : AE. Denn man ziehe die Linien DB, EC, und es sey

Fig. 14. a. b.

1. der Punkt A innerhalb des Kreises, dessen Mittelpunkt D ist; so wird, weil nach der Verzeichnung AD : AE = DF : EG, und AD kleiner ist, als der Halbmesser DF, auch AE kleiner seyn, als der Halbmesser EG (14, 5. E.), d. i. der Punkt A wird innerhalb des Kreises liegen, dessen Mittelpunkt E ist; also wird dem Umfang dieses Kreises jede Linie AB begegnen, die von dem Punkt A aus gezogen wird. Auf ähnliche Art würde man schliessen, wenn A auf dem Umfang des Kreises läge, dessen Mittelpunkt D ist.

Fig. 14. c. d.

2. Es sey der Punkt A ausserhalb des Kreises, dessen Mittelpunkt D ist; man ziehe die Linie AH, welche diesen Kreis in dem Punkt H auf eben der Seite der Linie AD berühre, auf welcher AB liegt, ferner ziehe man die Linie DH, und mit dieser gleichlauffend die Linie EK, die dem Kreise, dessen Mittelpunkt E ist, in K begegne. Weil nun AD : AE = DF : EG = DH : EK, und DH, EK gleichlauffend sind; so sind die Punkte A, H, K in einer geraden Linie. (Diß erhellet aus 26, 6. E. oder aus 32, 6. E.) Nun ist aber der Winkel DHA ein rechter (18, 3. E.), also ist auch EKA ein rechter Winkel (29, 1. E.); folglich berührt AK den Kreis GK (16, 3. E.). Jede gerade Linie also, die den Kreis FH schneidet, d. i. die zwischen AD und AH fällt, wird auch zwischen AE und die Berührungs-Linie AK fallen,

len, d. i. wird den Kreis GK in einem Punkt C schneiden.

In beyden Fällen aber ist, weil D, E die Mittelpunkte der Kreise sind, DB : EC = (DF : EG, d. i. nach der Verzeichn. =) AD : AE, und in den Dreyeken ADB, AEC, die einen gemeinschaftlichen oder gleichen Winkel bey A haben, sind die Winkel ABD, ACE entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner als ein rechter (denn man muß beyde AB und AC entweder zugleich an die erhabene oder an die hole Seite des Umkreises ziehen); folglich ist der Winkel ADB gleich AEC (7, 6. E.), mithin AB : AC = AD : AE, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

6. Saz.

Fig. 15. a. b.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, die einen gegebenen Winkel BAC einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt B einer dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie BG berührt: so berührt auch der Endpunkt C der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe an BG die gerade Linie AD unter jedem gegebenen Winkel, z. B. unter dem rechten Winkel ADB, und mache den Winkel DAE gleich dem Winkel BAC, und es sey das Verhältniß von DA zu AE gleich dem Verhältniß von BA zu AC, um nemlich noch einen andern Punkt E auf dem gesuchten Ort zu erhalten, endlich ziehe und verlängere man CE. Weil nun aus dem gegebenen Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linie BG die Linie AD unter einem gegebenen Winkel gezogen worden ist; so ist AD der Lage nach gegeben (33. D.), also der Punkt D (28. D.), folglich

AD

AD der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.); und, weil das Verhältniß von AD zu AE gegeben ist, so ist (2. D.) AE der Grösse nach gegeben, aber auch der Lage nach, weil die Lage von AD, der Punkt A, und der Winkel DAE gegeben sind (32. D.); folglich ist der Punkt E gegeben (30. D.). Es sind aber die Winkel DAE, BAC gleich, mithin ist, einen gemeinschaftlichen Winkel hinzugesezt, aber hinweggenommen, der Winkel DAB gleich EAC; und, weil DA : AE = BA : AC, so ist verwechselt DA : BA = AE : AC; es schliessen aber DA, BA und AE, AC gleiche Winkel ein; folglich sind die Dreyeke DAB, EAC gleichwinklicht (6, 6. E.), also der Winkel AEC gleich dem gegebenen Winkel ADB. Weil also aus einem gegebenen Punkt E, auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AE, die gerade Linie EC unter einem gegebenen Winkel AEC gezogen worden; so ist EC der Lage nach gegeben (32. D.). Folglich berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Aus dem Punkt A ziehe man an die der Lage nach gegebene gerade Linie DG irgend eine gerade Linie AD, mache den Winkel DAE gleich dem gegebenen Winkel, und nehme AE zu AD in dem gegebenen Verhältniß, durch den Punkt E ziehe man EF unter dem Winkel AEF = ADG, so, daß diese gleiche Winkel auf einerley Seiten der Linien AE, AD liegen: so wird die gerade Linie EF der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an die Linie DG irgend eine gerade Linie AB, und an EF eine gerade Linie AC so zieht, daß der Winkel BAC gleich wird dem Winkel DAE, so wird AB zu AC eben das Verhältniß haben, wie AD zu AE. Denn, weil die Winkel DAE, BAC gleich sind; so sind

 auch

auch DAB, EAC gleich; nun sind nach der Verzeichnung auch die Winkel ADB, AEC gleich, also die Dreyeke DAB, EAC gleichwinklicht, mithin AB : AC = AD : AE d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Berechnung.

Die Lage und Grösse der Linie AE, folglich auch die Lage der Linie FC, läßt sich leicht nach der Komposition auch durch Berechnung bestimmen. Wollte man den Winkel FLG, unter welchem die gerade Linie, welche der Ort ist, und die der Lage nach gegebene Linie BG einander schneiden, nebst dem Durchschnitts-Punkt L bestimmen; so könnte diß so geschehen. Die Linie AE schneidet die Linie FC entweder in dem Punkt L, oder unterhalb der Linie BG, oder oberhalb derselben. Schneidet AE die Linie FC in dem Punkt L, (Fig. 15. c.) so ist ALG, d. h. ALF + FLG = ADL + DAL (32, 1. E.). Nach der Verzeichnung aber ist AEF, oder hier ALF = ADL: folglich ist FLG = $\begin{cases} DAL. \\ DAE \end{cases}$

Schneidet AE (Fig. 15. d.) die Linie FC unterhalb der Linie BG; so muß folglich AE die Linie BG in einem Punkt P schneiden, und die Linie CF wird die Linie BG auch immer in einem Punkt schneiden. Denn wenn diß nicht wäre; so müßte CF mit BG gleichlauffen; folglich müßte, da nach der Verzeichnung AD senkrecht auf BG, und AE senkrecht auf CF ist, AE ebenfalls senkrecht auf BG seyn, oder es müßten in dem Dreyek ADP die Winkel bey D und P rechte seyn, und diß ist unmöglich. Es schneide also CF die Linie BG in L; so sind in den Dreyeken ADP, LEP, die Winkel bey P als Scheitelwinkel, und nach der Verzeichnung auch die Winkel bey D, E gleich, folglich ist auch der Winkel DAP oder DAE gleich dem ELP oder FLG. Endlich, wenn

wenn AE (Fig. 15. a. b.) die Linie FC oberhalb BG schneidet; so werden, wie vorhin erwiesen, sich auch die Linien FC, BG schneiden. Es geschehe diß wieder in L; so entsteht entweder ein Vierek ADEL, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt (2. Schol. 5, 4. E.), daher ist der Winkel FLG = DAE (22, 3. E.), oder, wenn die Punkte D, L zusammen fallen, d. h. wenn der Winkel AED gleich ist dem Winkel ADB, so ist CDA, d. h. CDB + BDA = DAE + AED, oder BDA $\backsim$ CDB = AED $\backsim$ DAE. Nun ist BDA nach der Verzeichnung gleich AED, folglich ist CDB oder FLG gleich DAE. In allen Fällen ist mithin der Winkel, unter welchem sich die Linien FC, BG schneiden gleich dem Winkel DAE, d. i. dem gegebenen BAC. Um nun auch den Durchschnitts-Punkt L zu bestimmen, sucht man DL, und, wenn AD, wie bey der Verzeichnung, senkrecht auf BG steht; so ist

in dem Dreyek DEL: $DL : ED = \left.\begin{matrix}\sin DEL \\ \operatorname{cosin} AED\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\sin FLG \\ \sin BAC\end{matrix}\right.$

und in dem Dreyek AED: $ED : AD = \sin BAC : \sin AED$

folglich gleichförmig $DL : AD = \left.\begin{matrix}\operatorname{cosin} AED \\ \operatorname{cotg} AED\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\sin AED \\ \sin.\ tot.\end{matrix}\right.$

In dem Dreyek DAE aber, in welchem der Winkel DAE gleich BAC und DA : AE = BA : AC ist, findet man

$$\operatorname{ctg} AED = \frac{AC}{AB} \cdot \operatorname{cosec} BAC - \operatorname{ctg} BAC:$$

folglich ist $DL : AD = \left(\frac{AC}{AB} \cdot \operatorname{cosec} BAC - \operatorname{ctg} BAC\right) : \sin.\ tot.$

Auf die übrigen Fälle, wo entweder das Dreyek DEL, oder das Dreyek AED verschwindet, wird man die Anwendung leicht machen können.

1. Lehn-

1. Lehnsaz.

Fig. 16. a.

Wenn aus einem Punkt A an die Mittelpunkte von zwey Kreisen die geraden Linien AD, AG gezogen werden, und diese Linien eben das Verhältniß unter einander haben, wie die Halbmesser ED, FG, und man die geraden Linien AK, AL zieht, welche die Kreise gegen einer Seite hin und AM, AN, welche sie gegen der andern Seite hin berühren: so ist jeder der beeden Winkel KAL, MAN gleich dem Winkel DAG, der zwischen den geraden Linien enthalten ist, welche aus dem Punkt A an die Mittelpunkte gezogen worden.

Denn man ziehe DK, GL, und, weil in den rechtwinklichten Dreyeken (18, 3. E.) AKD, ALG nach der Voraussezung AD : AG = DK : GL, oder verwechselt AD : DK = AG : GL; so sind diese Dreyeke gleichwinklicht (7, 6. E.); also sind die Winkel DAK, GAL gleich, und, wenn man zu jedem derselben den Winkel DAL hinzusezt: so sind die Winkel KAL, DAG gleich. Eben so wird bewiesen, daß MAN, DAG gleich seyen.

7. Saz.

Fig. 16. a. b.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, die einen gegebenen Winkel BAC einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt B der einen den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises, z. B. des Kreises, dessen Mittelpunkt D ist, berührt: so berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man

Man ziehe AD, BD und dann AF so, daß der Winkel DAF gleich werde dem Winkel BAC; an AF hin ziehe man CG, so, daß der Winkel ACG gleich werde ABD. Weil nun die Winkel DAG, BAC gleich sind; so sind auch DAB, GAC gleich; es sind aber auch die Winkel ACG, ABD gleich, mithin die Dreyeke ACG, ABD gleichwinklicht. Also DA : AG = AB : AC. Und, weil das Verhältniß von AB zu AC gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von DA zu AG gegeben; es ist aber DA der Grösse nach gegeben, weil die Punkte A, D gegeben sind (29. D.); also ist auch AG der Grösse nach gegeben (2. D.), aber auch der Lage nach (32. D.); folglich ist der Punkt G gegeben (30. D.). Und wegen der gleichwinklichten Dreyeke ist BD : CG = AB : AC, also das Verhältniß von BD zu CG gegeben; und, weil BD der Grösse nach gegeben ist, ist auch CG der Grösse nach gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt G eine der Grösse nach gegebene gerade Linie GC gezogen wird: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis (1. Saz.).

Komposition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man die Linie AD an den Mittelpunkt des der Lage nach gegebenen Kreises, diese begegne dem Umkreis in E, ferner ziehe man AF, so, daß der Winkel DAF gleich werde dem gegebenen Winkel, und zwar muß AF auf eben der Seite gegen die Linie AD liegen, auf welcher AC gegen die Linie AB gezogen werden soll; auf AF nehme man AG, so, daß AG zu AD das gegebene Verhältniß hat, und dann GF so, daß GF : DE = AG : AD, und beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GF einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an den

Um-

Umkreis, dessen Mittelpunkt D ist, irgend eine gerade Linie AB, und dann eine andere AH zieht, so, daß der Winkel BAH, den diese beeden Linien einschliessen, gleich wird dem Winkel DAG, und daß AH gegen AB eben die Lage bekommt, welche AG gegen AD hat; so wird AH dem Umfang des andern Kreises in einem Punkt C begegnen, und es wird seyn AB: AC = AD: AG, wenn man nemlich immer diejenigen Durchschnitts-Punkte B, C oder b, c zusammen nimmt, welche in Ansehung des Punktes A auf einerley Seiten der Kreise liegen. Denn, weil AD: AG = DE: GF; so ist, wenn der Punkt A innerhalb des Kreises BE, oder auf seinem Umfang liegt, d. i. wenn AD kleiner oder gleich ist DE, auch GA kleiner oder gleich GF, d. i. der Punkt A liegt auch innerhalb des Kreises CF, oder auf seinem Umfang; folglich begegnet jede aus dem Punkt A gezogene Linie dem Kreise CF. Ist aber der Punkt A ausserhalb des Kreises BE; so wird man auf ähnliche Art zeigen, daß er auch ausserhalb des Kreises CF sey; und, weil der Winkel BAH gleich ist dem Winkel DAG, d. i. nach dem Lehnsaz gleich dem Winkel KAL, der zwischen den von A aus nach einerley Seite der Kreise hin gezogenen Berührungs-Linien enthalten ist; weil überdiß AB den Kreis BE entweder berührt, oder zwischen die ihn berührenden Linien fällt; so muß auch AH den Kreis CF entweder berühren, oder zwischen die ihn berührenden Linien AL, AN fallen: in jedem Fall also begegnet AH dem Kreis CF: es geschehe diß in C, und man ziehe die Linien BD, CG. Weil nun die Winkel DAG, BAC gleich sind; so sind auch DAB, GAC gleich, und nach der Verzeichnung ist AD : AG = DB : GC; die Winkel ABD, ACG aber sind entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner, als ein rechter; folglich sind (7, 6. E.) die Dreyeke ABD, ACG gleichwinklicht, mithin AB: AC = AD: AG, d. i. in gegebenem Verhältniß.

Berech-

Berechnung.

In dem Dreyek ADG ist die Seite AD, und der Winkel DAG gegeben, und die Seite AG wird nach der Komposition leicht gefunden. Sie ist nemlich $= \frac{AD \cdot AC}{AB}$. Hieraus läßt sich nun auch das übrige berechnen. Es ist nemlich $\text{ctg}\, ADG = \frac{AB}{AC} \cdot \text{cosec}\, BAC - \text{ctg}\, BAC$, und $DG = AD \sqrt{1 + \frac{AC^2}{AB^2} - 2\frac{AC}{AB} \cdot \text{cosin}\, BAC}$. Endlich ist der Halbmesser $GF = \frac{AC}{AB} \cdot DE$.

8. Saz.

Fig. 17.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AB, AC abgeschnitten werden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt des einen Stüks B eine der Lage nach gegebene gerade Linie DE berührt; so berührt der Endpunkt C des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Aus dem Punkt A fälle man auf DE das Perpendikel AF; auf AF finde man den Punkt G, in welchem der Ort der Punkte C der Linie AF begegnet, d. i. man bestimme AG so, daß das Rechtek FAG gleich wird dem gegebenen Raum; so ist folglich der Punkt G gegeben, weil, da AF gegeben ist, auch AG gegeben seyn wird (61. D.). Und, weil nach der Voraussezung das Rchtk BAC eben diesem gegebenen Raum gleich ist; so sind die Rechteke BAC, FAG gleich, also BA : AF = AG : AC; folglich sind, wenn CG gezogen wird, die

Dreyeke BFA, GCA gleichwinklicht (6, 6. E.), also der Winkel ACG gleich dem rechten Winkel AFB. Weil also durch zwey gegebene Punkte A, G zwey gerade Linien AC, GC gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel einschliessen; so berührt der Durchschnitts-Punkt C dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis (nach dem 2ten Saz).

Komposition.

Auf die der Lage nach gegebene gerade Linie DE fälle man das Perpendikel AF, und nehme darauf den Punkt G so an, daß das Rechtek FAG gleich werde dem gegebenen Raum, über dem Durchmesser AG beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus dem Punkt A irgend eine gerade Linie AC, welche dem Umkreis in C, der geraden Linie DE aber in B begegne, ferner ziehe man CG. Nun ist der Winkel ACG im Halbkreis gleich dem rechten Winkel AFB; also sind die Dreyeke ACG, AFB gleichwinklicht; folglich AF : AB = AC : AG, also ist Rchtk BAC gleich dem Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

9. Saz.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AB, AC abgeschnitten werden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt des einen Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so wird, wenn der gegebene Punkt A auf diesem Umkreis liegt, der Endpunkt des andern Stüks eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt aber der Punkt A nicht auf diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig.

Fig. 17.

1. Fall. Der Endpunkt C des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis ACG, und der gegebene Punkt A liege auf dem nemlichen Kreise.

Man ziehe den Durchmesser AG (dieser ist der Lage und Grösse nach gegeben) und die Linie CG, auf AG nehme man einen Punkt F so, daß das Rchtk GAF gleich wird dem gegebenen Rchtk CAB; so ist, da AG gegeben ist, auch AF (61. D.), also der Punkt F (30. D.) gegeben. Es ist aber wegen der gleichen Rechteke AG : AC = AB : AF, wenn man also FB zieht; so sind die Dreyeke GAC, BAF gleichwinklicht; es ist aber der Winkel ACG im Halbkreise ein rechter, folglich ist auch AFB ein rechter Winkel; nun ist die Lage von AF, und der Punkt F gegeben, mithin ist BF der Lage nach gegeben (32. D.); also berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es ist diß der umgekehrte vorige Saz, und die Komposition ergiebt sich leicht. Man bestimme nemlich den Punkt F so, daß das Rchtk GAF gleich werde dem gegebenen Raum, aus dem Punkt F errichte man DFE senkrecht auf AG.

Fig. 18. a. b.

2. Fall. Der Endpunkt B des einen Stüks berühre den der Lage nach gegebenen Kreis DBE, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf diesem Umkreis. DE seye von dem gegebenen Kreis derjenige Durchmesser, der durch den Punkt A geht, und AB begegne dem Kreise wieder in F. Weil nun aus dem Punkt A, der innerhalb oder ausserhalb des Kreises DBE gegeben ist, die Linie ABF an einen gegebenen Kreis gezogen ist; so ist das Rechtek BAF gegeben (95. oder 96. D.). Nach der Voraussezung aber ist das Rchtk BAC gegeben; also

D ist

ist das Verhältniß der beyden Rechteke BAF, und BAC (1. D.); folglich das Verhältniß von AF zu AC gegeben. Es sind also aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AF, AC abgeschnitten, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt F des einen Stüks berührt den Umfang des der Lage nach gegebenen Kreises BDE; folglich berührt der Endpunkt C des andern Stüks den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises nach dem 5ten Saz.

Komposition.

Es seye DE von dem der Lage nach gegebenen Kreise derjenige Durchmesser, der durch den Punkt A geht, und man mache das Rechtek DAG gleich dem gegebenen Raum, nemlich so, daß die Punkte D, G auf einerley oder verschiedene Seiten des Punktes A fallen, je nachdem die Punkte B, C auf einerley oder auf verschiedene Seiten von eben diesem Punkt fallen sollen. Nun beschreibe man nach dem 5ten Saz den Kreis HCG so, daß, wenn aus dem Punkt A irgend eine Linie AF an den Kreis DFE gezogen wird, diese dem Kreis HCG in einem Punkt C begegne, und AF : AC gleich seye AE : AG; diß geschieht nemlich, wenn man den Punkt H so bestimmt, daß AE : AG = AD : AH, und dann über dem Durchmesser GH einen Kreis beschreibt; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn aus dem Punkt A ziehe man an den Kreis DE irgend eine gerade Linie AB, die dem Kreis wieder in F begegne; so begegnet nach der Verzeichnung AF dem Kreis HG in einem Punkte C, und es ist AF : AC = AE : AG, also Rchtk BAF : Rchtk BAC = Rchtk DAE : Rchtk DAG (1, 6. E.). Nun sind aber die Rechteke BAF, DAE gleich (Zus. 36, 3. E.). Also ist das Rechtek BAC gleich dem Rechtek DAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Raum. Und man sieht leicht, daß die Lage der Punkte B, C gerade die entgegengesezte seye von der Lage der Punkte F, C.

10. Saz.

Fig. 19.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel BAC, und ein gegebenes Rechtek BAC enthalten, und der Endpunkt der einen B eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises.

Man fälle aus dem Punkt A auf die gerade Linie DE das Perpendikel AF, und ziehe die Linie AG so, daß der Winkel FAG gleich werde dem gegebenen Winkel BAC, den Punkt G bestimme man so, daß das Rechtek FAG gleich seye dem Rechtek BAC, endlich ziehe man GC. Weil nun die Winkel FAG, BAC gleich sind; so sind, einen gemeinschaftlichen Winkel hinzugesezt oder hinweggenommen, auch die Winkel FAB, GAC gleich; und, weil die Rechteke FAG, BAC gleich sind; so ist FA : AB = AC : AG, folglich sind die Dreyeke FAB, GAC gleichwinklicht (6, 6. E.), also ist der Winkel ACG gleich dem rechten Winkel AFB; nun ist die Lage (31. D.) und Grösse (28. 29. D.) von AF, und auch das Rechtek FAG gegeben, mithin ist AG der Grösse nach gegeben (61. D.), aber auch der Lage nach wegen des gegebenen Winkels FAG (32. D.); also ist der Punkt G gegeben (30. D.). Weil also aus zwey gegebenen Punkten A, G zwey Linien AC, GC gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel ACG einschliessen; so berührt der Punkt C den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises (nach dem 2ten Saz).

Komposition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man AF, und AG wie oben, über AG als Durchmesser beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus A an DE irgend eine gerade Linie AB, und mache den Winkel BAH gleich FAG; so wird AH dem Umkreis noch in einem Punkt C begegnen, und das Rchtk BAC wird gleich seyn dem Rchtk FAG. Es sind nemlich wegen der Gleichheit der Winkel FAG, BAH auch die Winkel FAB, GAH gleich; also ist der Winkel GAH spizig, folglich schneidet die gerade Linie AH den Kreis; sie schneide ihn in C, und man ziehe GC, so sind die Dreyeke FAB, GAC gleichwinklicht, denn der Winkel ACG im Halbkreis ist gleich dem rechten Winkel AFB; also AF : AB = AC : AG, folglich das Rchtk BAC gleich dem Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

11. Saz.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AB, AC gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel BAC, und ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt der einen den Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises berührt; so wird, wenn der Punkt A auf dem Umfang dieses Kreises liegt, der Endpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt aber der gegebene Punkt A nicht auf dem Umfang dieses Kreises; so berührt der Endpunkt der andern Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 19.

1. Fall. Der gegebene Punkt A liege auf dem Umfang des der Lage nach gegebenen Kreises, dessen Durch-

Durchmesser AG ist, welcher Durchmesser AG also der Lage nach gegeben ist, und der Endpunkt C der einen der gezogenen Linie berühre den Umfang eben dieses Kreises; so berührt der Endpunkt B der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn man ziehe CG und hernach AF, so, daß der Winkel GAF gleich werde dem Winkel CAB, und das Rchtk GAF gleich dem Rchtk CAB, und daß AF, AB auf einerley Seiten der geraden Linien AG, AC fallen, endlich ziehe man noch die Linie BF. Es sind also die Dreyeke FAB, CAG gleichwinklicht, mithin der Winkel AFB gleich dem rechten Winkel ACG. Weil aber die Lage von AG, der Winkel CAB oder GAF, und der Punkt A gegeben sind; so ist die gerade Linie AF der Lage nach gegeben (32. D.), aber auch der Grösse nach, weil AG der Grösse nach, und das Rchtk GAF gegeben sind, also ist der Punkt F gegeben. Nun ist aber auch der rechte Winkel AFB, mithin die gerade Linie FB, welche der Punkt B berührt, der Lage nach gegeben. Die Komposition ergiebt sich leicht. Man ziehe nemlich die gerade Linie AF, wie gesagt worden, und durch F errichte man auf AF das Perpendikel FE.

Fig. 20.

2. Fall. Der gegebene Punkt A liege nicht auf dem Umfang des der Lage nach gegebenen Kreises BDE, und der Endpunkt B der einen der gezogenen Linien berühre diesen Kreis; so berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn AB begegne dem Kreise wieder in D; so ist, weil aus einem gegebenen Punkt A an einen der Lage nach gegebenen Kreis die gerade Linie ADB gezogen ist, das Rechtek BAD gegeben (95. oder 96. D.); nun ist nach der Voraussezung das Rchtk BAC gegeben; folglich ist (1. D.) das Verhältniß der Rechteke BAD, BAC,

 also

also das Verhältniß von AD zu AC gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt A die gerade Linien AD, AC gezogen sind, die einen gegebenen Winkel DAC einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und weil der Endpunkt D der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Endpunkt C der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 7ten Saz.

Komposition.

Aus dem gegebenen Punkt A ziehe man durch den Mittelpunkt des der Lage nach gegebenen Kreises die gerade Linie AEF, und aus eben diesem Punkt ziehe man AG so, daß sowohl der Winkel FAG gleich werde dem gegebenen Winkel, als auch das Rechtek FAG gleich werde dem gegebenen Raum; und nach der Komposition des 7ten Sazes beschreibe man einen Umkreis, welcher der Ort ist von allen Punkten G, die nemlich Endpunkte sind von geraden Linien AG, welche mit den an den Umkreis BDE gezogenen Linien AE einen Winkel machen gleich dem gegebenen Winkel FAG, und zu welchen die Linien AE ein Verhältniß haben gleich dem Verhältniß von AE : AG. Es seye der beschriebene Umkreis GCH; so wird dieser der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A irgend eine Linie AB an den Kreis BDE, und aus eben diesem Punkt eine Linie AK zieht, so, daß der Winkel BAK gleich wird dem Winkel FAG; so begegnet AK dem Kreise GCH in zwey Punkten C, H (wie aus dem 7ten Saz erhellet), und es ist das Rchtk BAC gleich dem gegebenen Rchtk FAG, wenn man nur immer von den Durchschnitts-Punkten der Linien ADB, ACH mit den Kreisen diejenige zusammen nimmt, welche eine entgegengesezte Lage haben. Denn, weil nach der Verzeichnung (nemlich nach

nach dem 7ten Saz) AD : AC = AE : AG; so ist Rchtk BAD : Rchtk BAC = (AE : AG, d. i. =) Rchtk FAE : Rchtk FAG. Nun ist Rchtk BAD = Rchtk FAE; mithin Rchtk BAC = Rchtk FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum. Und, weil nach eben dem 7ten Saz AD : AC = AB : AH; so ist Rchtk DAH = Rchtk BAC oder FAG, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Berechnung.

Die Berechnung des 1sten Falls wird sehr leicht aus der Komposition hergeleitet. Für den 2ten Fall ist $AG = \frac{AB.\,AC}{AF}$, folglich $AG : AE = AB.\,AC : AF.\,AE$, und, wenn O der Mittelpunkt des gegebenen, M des zu findenden Kreises ist; so ist nach dem 7ten Saz $AM = \frac{AO.\,AB.\,AC}{AF.\,AE}$. In dem Dreyek AOM, in welchem also jezt die Seiten AO, AM nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind, findet man ferner

$$\operatorname{ctg} AOM = \frac{AF.\,AE}{AB.\,AC} \cdot \operatorname{cosec} BAC - \operatorname{ctg} BAC,$$

und $OM = AO \sqrt{1 + \left(\frac{AB.\,AC}{AF.\,AE}\right)^2 - 2 \cdot \frac{AB.\,AC}{AF.\,AE} \cdot \operatorname{cosin} BAC}$.

Der Halbmesser GM endlich ist $= \frac{AB.\,AC.\,EO}{AF.\,AE}$.

12. Saz.

Fig. 21.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche

ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; und der Endpunkt C der einen dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn, man fälle aus A auf EF das Perpendikel AG, welches also der Lage (33. D.) und Grösse nach (28. 29. D.) gegeben ist.

Aus B ziehe man, auf welcher Seite man will, BH mit AG gleichlauffend, und nehme BH : AG = BD : AC; so ist BH der Lage (31. D.) aber auch der Grösse (2. D.) nach gegeben, und, weil der Punkt B gegeben ist; so ist folglich auch der Punkt H gegeben (30. D.). Man ziehe DH, und weil AG, BH, wie auch AC, BD gleichlauffend sind; so sind die Winkel GAC, HBD gleich. Weil überdiß AG : BH = AC : BD; so sind die Dreyeke GAC, HBD gleichwinklicht (6, 6. E.); mithin BHD gleich dem rechten Winkel AGC. Weil also aus einem gegebenen Punkt H auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie BH die gerade Linie HD unter einem gegebenen Winkel gezogen worden; so ist HD der Lage nach gegeben (32. D.), mithin berührt D eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man fälle auf EF das Perpendikel AG, durch B ziehe man BK mit AG gleichlauffend, und auf BK nehme man BH : AG in dem gegebenen Verhältniß, endlich ziehe man durch H die Linie HL gleichlauffend mit EF; so wird HL der gesuchte Ort seyn. Wenn man nemlich aus den Punkten A, B an EF, LH irgend zwey Parallel-Linien AC, BD zieht, so sind die Dreyeke GAC, HBD gleichwinklicht, also ist AC : BD = AG : BH, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

13. Saz.

13. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 22.

Man ziehe AE, und durch den Punkt B, auf welcher Seite man will, BF mit AE gleichlauffend, nehme BF : AE = BD : AC, und ziehe EC, FD. Es ist also BF der Lage und Grösse nach, folglich auch der Punkt F gegeben, und die Dreyeke AEC, BFD sind gleichwinklicht, welches wie im vorigen Saz erwiesen wird. Folglich ist EC : FD = AC : BD, d. i. in dem gegebenen Verhältniß; und, weil EC der Grösse nach gegeben ist; so ist auch FD der Grösse nach gegeben (2. D.), weil überdiß der Punkt F gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nach dem 1sten Saz.

Komposition.

Man ziehe die gerade Linie AE, die dem gegebenen Umkreis in G begegne, durch B ziehe man mit AE eine Parallel-Linie, auf dieser nehme man BF zu AE, und FH zu EG in dem gegebenen Verhältniß, aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FH beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus A irgend eine Linie AC, die dem Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, in C, c begeg-

net, und dann aus B mit AC eine Parallel-Linie BK zieht; so wird diese dem Umkreis, dessen Mittelpunkt F ist, in zwey Punkten D, d begegnen, und es wird seyn AC : BD = AE : BF, also in dem gegebenen Verhältniß, wenn man nemlich immer diejenigen Punkte C, D oder c, d zusammen nimmt, die in Ansehung der Punkte A, B auf einerley Seiten der Kreise liegen. Denn man ziehe AL, BM, welche die Kreise auf den Seiten der Punkte C, D berühren, und hernach die Linien EL, FM. Die Dreyeke AEL, BFM sind gleichwinklicht, welches ganz wie im 1sten Lehnsaz erwiesen wird; folglich sind die Winkel EAL, FBM gleich; es sind aber auch die Winkel EAC, FBK gleich, weil AE, BF und AC, BD gleichlauffend sind; weil nun AC innerhalb des Winkels EAL fällt, so wird BK innerhalb des Winkels FBM fallen, also dem Kreis begegnen; diß geschehe in D, d, und man ziehe EC, FD. Weil nun nach der Verzeichnung AE : BF = EG : FH = EC : FD, und in den Dreyeken AEC, BFD die Winkel EAC, FBD gleich, und die Winkel bey C, D entweder beyde kleiner, oder beyde nicht kleiner sind, als ein rechter; so sind die Dreyeke AEC, BFD gleichwinklicht (7, 6. E.); also ist AC : BD = AE : BF, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

14. Saz.

Fig. 23.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt C der einen dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF berührt; so berührt der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn

Denn man nehme auf der geraden Linie AC, auf welcher Seite man will, AG gleich BD. Weil nun auf einer geraden Linie aus einem gegebenen Punkt A zwey Stüke AC, AG abgeschnitten sind, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt der einen C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern G einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 8ten Saz. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AG, BD gezogen sind, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn sie sind gleich), und der Endpunkt der einen G einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem vorhergehenden Saz.

Die Komposition folgt leicht aus den Kompositionen des 8ten und vorhergehenden 13ten Sazes. Man fälle nehmlich aus dem Punkt A auf die gerade Linie EF das Perpendikel AH, und bestimme auf diesem den Punkt K so, daß das Rchtk HAK gleich wird dem gegebenen Raum, aus dem Punkt B ziehe man BL mit AK gleich und gleichlauffend, und beschreibe über dem Durchmesser BL einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus A an die gerade Linie EF irgend eine gerade Linie AC, und aus B mit AC gleichlauffend eine Linie BD zieht, die dem Kreis BDL in D begegne; so wird das Rechtek AC × BD gleich seyn dem Rechtek HAK. Denn man denke sich über dem Durchmesser AK einen Kreis beschrieben, dem AC in G begegne; so ist nach dem 13ten Saz, weil BL = AK, auch BD = AG; nach dem 8ten Saz aber ist das Rchtk CAG, mithin auch das Rchtk CA × BD gleich dem Rchtk HAK, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

15. Saz.

15. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-linien AC, BD gezogen werden, welche ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt der einen dieser linien einen der lage nach gegebenen Umkreis berührt; so wird, wenn der gegebene Punkt, von welchem aus diese linie gezogen worden, auch auf diesem Umkreis liegt, der Endpunkt der andern eine der lage nach gegebene gerade linie berühren. liegt hingegen dieser Punkt nicht auf diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt der andern ebenfalls einen der lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 23.

1. Fall. Der Endpunkt der einen D liege auf einem der lage nach gegebenen Umkreis, z. B. auf dem, dessen Durchmesser BL ist, und der gegebene Punkt B seye auf eben diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt C der andern eine der lage nach gegebene gerade linie. Denn man nehme auf AC den Punkt G so an, daß AG = BD; so berührt nach dem 13ten Saz der Punkt G einen der lage nach gegebenen Umkreis, nemlich den Umkreis, dessen Durchmesser AK mit BL gleich und gleichlauffend ist. Und, weil aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden linie zwey Stüke AC, AG abgeschnitten worden, welche ein gegebenes Rechtk enthalten, und der Endpunkt des einen G auf eben dem der lage nach gegebenen Umkreis liegt, auf welchem auch der Punkt A liegt; so berührt der Endpunkt des andern Stüks C eine der lage nach gegebene gerade linie nach dem 9ten Saz 1. Fall. Es ist diß der umgekehrte vorige Saz, und die Komposition ergiebt sich leicht aus den Kompositionen des 9ten und 13ten Sazes. Man ziehe nemlich AH gleichlauffend mit BL, bestimme den

Punkt

Punkt H so, daß das Rchtk AH × BL oder HAK gleich werde dem gegebenen Raum, aus H errichte man EHF senkrecht auf AH; so ist EHF der verlangte Ort. Denn wenn man aus A, B zwey gerade Parallel-Linien, welche man will, z. B. AC, BD zieht; so ist das Rchtk BD × AC, d. i. GAC gleich dem Rchtk HAK oder AH × BL, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 24.

2. Fall. Der Endpunkt C der einen der beyden Parallel-Linien liege auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis, dessen Durchmesser, der durch A geht, EF ist, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt D der andern Parallel-Linie ebenfalls einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Denn man nehme auf AC das Stük AG gleich BD. Weil nun aus einem gegebenen Punkt A auf einer geraden Linie zwey Stüke AC, AG abgeschnitten worden, welche ein gegebenes Rechtek enthalten, und der Endpunkt C des einen Stüks auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis ECF, der gegebene Punkt A aber nicht auf diesem Umkreis liegt; so berührt der Endpunkt G des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 9ten Saz 2. Fall. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey Parallel-Linien AG, BD gezogen sind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn sie sind gleich) und G einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch D einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nach dem 13ten Saz. Die Komposition ergiebt sich aus den Kompositionen des 9ten Sazes 2. Fall und des 13ten Sazes. Man bestimme nemlich auf AF den Punkt H so, daß das Rchtk EAH gleich werde dem gegebenen Raum, und den Punkt K so, daß AF : AH = AE : AK; durch B

ziehe

ziehe man eine gerade mit AH gleichlauffende Linie, und nehme darauf BL, BM gleich AH, AK; über dem Durchmesser ML beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an den Kreis ECF irgend eine gerade Linie AC, und aus dem Punkt B mit AC gleichlauffend eine Linie BN zieht; so wird BN dem Kreis MDL in einem Punkt D begegnen, und es wird das Rechtek AC × BD gleich seyn dem Rechtek EAH, d. i. gleich dem gegebenen Raum. Denn man beschreibe über dem Durchmesser KH einen Kreis KGH; so begegnet nach dem 2ten Fall des 9ten Sazes die gerade Linie AC diesem Kreis in einem Punkt G, und das Rechtek CAG ist gleich dem Rchtk EAH. Weil aber auf den geraden Parallel-Linien die Stüke BL, BM gleich sind AH, AK; so begegnet BN dem Kreis MDL nach dem 13ten Saz in einem Punkt D, und es ist BD gleich AG; also ist das Rchtk AC × BD oder CAG gleich dem Rchtk EAH, d. i. dem gegebenen Raum. Man sieht übrigens von selbst, daß man die gerade Linien AH, AK nicht nöthig gehabt hätte, um BL, BM zu finden, und den Kreis MDL, welcher der gesuchte Ort ist, zu beschreiben; sondern man braucht sie nur, die Komposition zu beweisen. Eben dieses ist bey einigen folgenden Säzen zu bemerken.

16. Saz.

Fig. 25.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie FG berührt; so berührt auch der Endpunkt

punkt D der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Durch A ziehe man eine mit BD gleiche und gleichlauffende Linie AH, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche CAH gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt C der einen eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt auch der Endpunkt H der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 6ten Saz. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallelen gezogen sind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn sie sind gleich), und der Endpunkt der einen H eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt auch der Endpunkt der andern D eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 12ten Saz.

Die Komposition folgt aus den Kompositionen des 6ten und 12ten Sazes so: der gegebene Winkel seye KLM, und das gegebene Verhältniß, welches die durch A zu ziehende Linie zu der durch B zu ziehenden haben soll, seye das Verhältniß von KL zu LM. Aus A fälle man auf FG das Perpendikel AN, und ziehe AO so, daß der Winkel NAO gleich wird dem gegebenen Winkel KLM. Es muß aber AO gegen AN auf eben der Seite liegen, auf welcher der Voraussezung nach die Linie AE (welche mit BE den Winkel AEB = KLM einschließt) gegen AB liegen soll; denn der Winkel AEB kann, auf welcher Seite von AB man will, liegen. Auf AO bestimme man den Punkt P so, daß KL : LM = AN : AP. Aus B ziehe man, auf welcher Seite man will, BQ mit AP gleich und gleichlauffend, aus dem Punkt Q errichte man auf BQ das Perpendikel QR; so wird diß der gesuchte Ort seyn. Denn man

ziehe

ziehe aus dem Punkt A an FG irgend eine gerade Linie AC, und aus eben diesem Punkt die gerade Linie AS so, daß der Winkel SAC gleich wird dem gegebenen Winkel KLM, und es seye PT senkrecht auf AP. Es ist also PT der im 6ten Saz beschriebene Ort; folglich begegnet die gerade Linie AS der geraden Linie PT in einem Punkt H, und es ist KL : LM = AC : AH. Man ziehe BV mit AH gleichlauffend, und diese Linie BV begegne der Linie AC in E, weil nun der Winkel BEA gleich ist dem Winkel CAS, d. i. dem Winkel KLM; so ist BE eine gerade Linie, welche mit AC einen dem gegebenen gleichen Winkel einschließt. Weil aber die gerade Linien AP, BQ gleich und gleichlauffend, und die geraden Linien PT, QR, so wie AH, BV gleichlauffend sind; so begegnet nach dem 12ten Saz BV der Linie QR in einem Punkt D, so, daß AH, BD gleich werden. Folglich ist AC : $\left\{\begin{matrix} BD \\ AH \end{matrix}\right.$ = KL : LM.

Berechnung.

Die Lage und Grösse der Linie AP, folglich auch der ihr gleichen und gleichlauffenden BQ werden leicht aus der Komposition bestimmt. Wollte man den Winkel FZQ, unter welchem die gesuchte Linie QR die gegebene FG schneidet, und den Durchschnitts-Punkt Z bestimmen; so könnte diß so geschehen. Der Winkel TGZ ist gleich dem gegebenen Winkel KLM, welches völlig, wie bey der Berechnung des 6ten Sazes erwiesen wird, und, weil ZQ, TG gleichlauffen; so ist auch der Winkel FZQ gleich dem gegebenen Winkel KLM. Um nun noch den Durchschnitts-Punkt Z zu bestimmen, fälle man aus dem Punkt B auf die der Lage nach gegebene gerade Linie NC das Perpendikel BF; so ist der Winkel FBQ gleich dem Nebenwinkel von FZQ, also

also gegeben, und man kennt überdiß FB, BQ (leztere Linie nemlich ist $= AP = \frac{AN \cdot LM}{KL}$), folglich ist

$$\text{ctg } BQF = \frac{BQ}{BF} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ.$$

$$= \frac{AN \cdot LM}{BF \cdot KL} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ$$

Nun ist in dem Dreyek

$$FQZ: FQ: FZ = \left.\begin{matrix}\text{sin. } FZQ \\ \text{sin. } KLM\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{sin. } FQZ \\ \text{cosin } BQF\end{matrix}\right.$$

und in dem Dreyek

$$FBQ: FB: FQ = \text{sin. } BQF: \text{sin. } \left\{\begin{matrix}FBQ \\ KLM\end{matrix}\right.$$

folglich gleichförmig

$$FB: FZ = \left\{\begin{matrix}\text{sin. } BQF \\ \text{sin. tot.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{cosin } BQF \\ \text{ctg. } BQF\end{matrix}\right.$$

Mithin ist

$$FZ: FB = \left(\frac{BQ}{BF} \cdot \text{cosec } FBQ - \text{ctg } FBQ\right): \text{sin. tot.}$$

17. Saz.

Fig. 26.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt der einen C den Umfang eines gegebenen Kreises, z. B. des Kreises, dessen Mittelpunkt F ist, berührt; so berührt auch der Endpunkt der andern D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, so daß die Winkel AEB, CAH

gleich werden, so ist, weil der Winkel AEB gegeben ist, auch der Winkel CAH gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt der einen C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Endpunkt H der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 7ten Saz. Ferner, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Parallel-Linien AH, BD gezogen sind, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben (denn sie sind gleich) und der Endpunkt der einen H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Endpunkt der andern D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Komposition folgt aus den Kompositionen des 7ten und 13ten Sazes so: der gegebene Winkel seye KLM, und das gegebene Verhältniß, welches die durch A zu ziehende Linie zu der durch B zu ziehenden haben soll, seye das Verhältniß von KL zu LM. Diese Stüke also, und den Kreis, dessen Mittelpunkt F ist, als gegeben voraus gesezt, denke man sich nach dem 7ten Saz den Kreis, dessen Mittelpunkt N ist, so beschrieben, daß, wenn man irgend eine gerade Linie AC an den Kreis, dessen Mittelpunkt F ist, und dann eine andere gerade Linie AO zieht, welche mit der vorigen den Winkel CAO gleich KLM einschließt, daß dann diese gerade Linie AO dem Kreis, dessen Mittelpunkt N ist, in einem Punkt H begegne, und AC : AH = KL : LM seye. Man ziehe weiter die gerade Linie AN, die dem Kreis in P begegne, und durch den Punkt B eine mit AN gleichlauffende Linie, auf dieser nehme man, auf welcher Seite von B man will, BQ, BR gleich AN, AP, und beschreibe aus dem Mittelpunkt Q mit dem Halbmesser QR einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte

suchte Ort seyn. Denn man ziehe BT mit AH gleichlauffend, und BT begegne der Linie AC in dem Punkt E; so ist der Winkel BEA gleich dem Winkel CAO, d. i. dem Winkel KLM; und weil BQ, BR mit AN, AP gleich und gleichlauffend, und AH mit BT gleichlauffend ist; so begegnet BT (13. Saz) dem Kreis, dessen Mittelpunkt Q ist, in einem Punkt D so, daß AH = BD. Nach dem 7ten Saz aber ist AC : $\left\{\begin{matrix} AH \\ BD \end{matrix}\right.$ = KL : LM; folglich der Umfang des Kreises, dessen Mittelpunkt Q ist, der gesuchte Ort.

Berechnung.

In dem Dreyek ABQ ist die Seite AB, und der Winkel ABQ = BAN vermittelst der gegebenen Winkel FAN, FAB gegeben, und BQ findet man leicht $X = AN = \frac{AF \cdot LM}{KL}$. Hieraus läßt sich das übrige auf ähnliche Art, wie beym 7ten oder 11ten Saz leicht finden. Eben so verfährt man bey dem folgenden 18ten und 19ten Saz.

18. Saz.

Fig. 27.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB, und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt C der einen eine der Lage nach gegebene gerade Linie FG berührt; so berührt der Endpunkt D der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche Winkel CAH gegeben. Weil also aus dem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt der einen C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; so berührt der Endpunkt der andern H einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 10ten Saz. Und, weil AH, BD gleich und gleichlauffend sind, und H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Komposition fließt aus den Kompositionen des 10ten und 13ten Sazes. Man fälle nemlich aus A auf FG das Perpendikel AK, und ziehe AL so, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde; durch den Punkt B ziehe man BM mit AL gleich und gleichlauffend; so wird der Umfang des über dem Durchmesser BM beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man denke sich einen Kreis über dem Durchmesser AL beschrieben, weil nun dessen Umfang der in dem 10ten Saz beschriebene Ort ist; so begegnet, wenn man irgend eine gerade Linie AC an FG, und dann AN so zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL, diese Linie AN dem Kreis ALH in einem Punkt H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL. Nun ziehe man BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie CA in E; so ist der Winkel BEA gleich dem Winkel CAH, d. i. dem gegebenen Winkel KAL, und, weil AL, BM gleich und gleichlauffend, AH und OB aber gleichlauffend sind; so begegnet nach dem 13ten Saz OB dem Kreis BMD in einem Punkt D, und AH, BD sind gleich. Nun ist gezeigt worden,

daß

daß das Rchtk CAH gleich seye dem Rchtk KAL, also ist auch das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk KAL, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

19. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BD gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel AEB und einen gegebenen Raum einschliessen, und der Endpunkt der einen dieser Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so wird, wenn der gegebene Punkt, von welchem aus diese Linie gezogen wird, auch auf diesem Umkreis liegt, der Endpunkt der andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Liegt hingegen dieser gegebene Punkt nicht auf diesem Umkreis; so berührt der Endpunkt der andern einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 27.

1. Fall. Es liege der gegebene Punkt B auf einem der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. auf dem, dessen Durchmesser BM ist, und der Punkt D berühre eben diesen Umkreis BDM; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Aus dem Punkt A ziehe man AH gleich und gleichlauffend mit BD, weil nun die Punkte B, A gegeben sind, und D einen der Lage nach gegebenen durch B gehenden Umkreis berührt; so berührt auch H einen der Lage nach gegebenen durch A gehenden Umkreis nach dem 13ten Saz. Es ist aber auch der Winkel HAC gegeben, als welcher gleich ist dem gegebenen Winkel BEA; weil also aus einem gegebenen Punkt A zwey gerade Linien AC, AH gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel einschliessen, und das Rchtk CAH gleich ist dem Rchtk AC×BD, und der

Punkt H eben den Umkreis berührt, auf welchem A liegt; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Fall des 11ten Sazes.

Die Komposition fließt aus den Kompositionen des 1sten Falls vom 11ten Saz, und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich AL gleich und gleichlauffend mit BM, und AK so, daß der Winkel KAL dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk KAL dem gegebenen Raum gleich werde, durch K errichte man auf AK das Perpendikel FKG; so wird FG der gesuchte Ort seyn. Denn, wenn man an FG irgend eine Line AC, und dann AN so zieht, daß der Winkel CAN gleich wird dem Winkel KAL; so begegnet AN nach dem 1sten Fall des 11ten Sazes dem Umfang des Kreises, von dem AL ein Durchmesser ist, in einem Punkt H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk KAL: man ziehe durch den Punkt B die gerade Linie BO mit AH gleichlauffend, und es begegne BO der Linie AC in E; so ist folglich BO eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel BEA gleich dem Winkel HAC, d. i. gleich dem gegebenen Winkel KAL einschließt. Und nach dem 13ten Saz begegnet BO dem über dem Durchmesser BM beschriebenen Kreis in einem Punkt D, und es ist BD = AH, mithin das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk CAH, d. i. gleich dem gegebenen Rchtk KAL.

Fig. 28.

2. Fall. Der Punkt C berühre einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den, dessen durch den gegebenen Punkt A gehender Durchmesser FG ist, der gegebene Punkt A aber liege nicht auf diesem Umkreise; so berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Man ziehe AH gleich und gleichlauffend

fend mit BD, weil nun der Winkel AEB gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche CAH gegeben; es ist aber auch das Rchtk CAH gegeben; mithin berührt nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Und, weil aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AH, BD gleich und gleichlauffend gezogen sind, und der Punkt H einen der Lage nach gegebenen Umkreis berührt; so berührt auch der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 13ten Saz.

Die Komposition fließt aus den Kompositionen des 2ten Falls vom 11ten Saz und des 13ten Sazes. Man ziehe nemlich die gerade Linie AK so, daß der Winkel FAK dem gegebenen Winkel, und auch das Rchtk FAK dem gegebenen Raum gleich wird, man finde KL den Durchmesser des im 2ten Fall des 11ten Sazes beschriebenen Kreises, ziehe aus dem Punkt B eine mit AK gleichlauffende Linie, und nehme darauf BM, BN gleich AK, AL; so wird der Umfang des über dem Durchmesser MN beschriebenen Kreises der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A irgend eine Linie AC an den Umkreis, dessen Durchmesser FG ist, und aus eben diesem Punkt eine andere Linie AO so, daß der Winkel CAO gleich werde dem Winkel FAK; so begegnet nach dem 2ten Fall des 11ten Sazes AO dem über dem Durchmesser KL beschriebenen Kreise in einem Punkte H, und es ist das Rchtk CAH gleich dem Rchtk FAK. Aus dem Punkte B ziehe man BP gleichlauffend mit AO, und es begegne BP der Linie AC in E; so ist folglich BP eine gerade Linie, die mit AC einen Winkel AEB gleich dem Winkel CAH, d. i. gleich dem gegebenen Winkel FAK einschließt. Und, weil BM, BN gleich und gleichlauffend sind mit AK, AL, und BP gleichlauffend mit AH; so begegnet nach dem 13ten Saz BP dem Kreise NMD in einem Punkte D,

und es ist BD gleich AH; folglich das Rchtk AC×BD gleich dem Rchtk CAH, d. i. gleich dem gegebenen Rchtk FAK.

20. Saz.

Fig. 29.

Wenn der eine Endpunkt B einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie AB, die mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD gleichlauffend ist, eine der Lage nach gegebene gerade Linie CE berührt; so berührt auch der andere Endpunkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Weil die geraden Linien CD, CE der Lage nach gegeben sind; so ist ihr Durchschnitts-Punkt C gegeben (28. D.). Auf der Linie CD nehme man auf der Seite von CE, auf welcher BA liegt, CF gleich BA. Weil nun BA der Grösse nach gegeben ist; so ist es auch CF: es ist aber CF der Lage nach, und überdiß auch der Punkt C gegeben; folglich ist der Punkt F gegeben (30. D.). Man ziehe AF, und, weil AB, FC gleich und gleichlauffend sind; so ist auch FA mit CB gleichlauffend. Weil also durch einen gegebenen Punkt F die Linie FA mit der der Lage nach gegebenen CE gleichlauffend gezogen ist; so ist FA der Lage nach gegeben (31. D.); also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die Komposition ergiebt sich leicht. Auf der geraden Linie CD nehme man CF gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie, und durch den Punkt F ziehe man FA mit CE gleichlauffend; so wird FA der gesuchte Ort seyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben eine Linie AB mit CD gleichlauffend zieht; so ist AB gleich CF, d. i. gleich der gegebenen geraden Linie nach 34, 1. E.

21. Saz.

Diesen sezte Fermat zum vorhergehenden hinzu.

Fig. 30.

Wenn der eine Endpunkt A einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie AB, die mit einer der Lage nach gegebenen CD gleichlauffend ist, einen der Lage nach gegebenen Umkreis, z. B. den, dessen Mittelpunkt E ist, berührt; so berührt auch der andere Endpunkt B einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Aus dem Mittelpunkt E ziehe man, nach welcher Seite man will, die gerade Linie EF mit AB gleich und gleichlauffend, und überdiß AE, BF; weil nun AB der Grösse nach gegeben ist; so ist auch EF der Grösse nach gegeben; und, weil AB mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie CD gleichlauffend ist; so ist auch EF mit CD gleichlauffend. Es ist aber der Punkt E gegeben; folglich ist EF der Lage nach gegeben (31. D.), aber auch der Grösse nach; also ist der Punkt F gegeben (30. D.). Und, weil AE der Grösse nach gegeben ist; so ist die ihr gleiche (33, 1. E.) Linie BF der Grösse nach gegeben. Weil endlich der Punkt F gegeben ist; so berührt der Punkt B einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz.

Komposition.

Man ziehe durch den Mittelpunkt E des der Lage nach gegebenen Kreises eine mit CD gleichlauffende Linie, und nehme auf derselben, auf welcher Seite von E man will, die gerade Linie EF gleich der der Grösse nach gegebenen Linie. Es begegne EF dem gegebenen Umkreis in G, und man nehme FH = EG, und beschreibe aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FH einen

Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf dem Umkreis, dessen Mittelpunkt E ist, eine gerade mit CD gleichlauffende Linie zieht; so wird diese dem Kreis, dessen Mittelpunkt F ist, in einem Punkt B begegnen, wie leicht erhellet; und es wird AB gleich seyn EF, wenn man nemlich nur die Punkte A, B auf einerley Seiten der Kreise annimmt. Denn man ziehe AE, BF, und fälle auf AB die Perpendikel EK, FL; so sind diese unter einander gleich (34. 1. E.). Es sind aber auch AE, BF gleich; also sind in den Dreyeken AEK, BFL AK, BL gleich (47, 1. E.); folglich ist AB = KL, d. i. = EF d. i. gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie.

22. Saz.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallelen BC, DE zwey gerade Linien AF, AG entweder auf der nemlichen geraden Linie, oder unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und in beeden Fällen AF, AG ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 31. a. b.

1. Fall. Wenn AF, AG auf der nemlichen geraden Linie liegen. Aus dem 40sten Saz der Dat. erhellt, daß eine durch den Punkt A gezogene mit den beyden Linien BC, DE gleichlauffende Linie der Lage nach gegeben seye; also berührt der Punkt A diese der Lage nach gegebene gerade Linie. Die

Komposition ergiebt sich aus eben diesem Saz der Dat. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC an DE irgend eine gerade Linie HK,

HK, und, wenn der Punkt A zwischen den Parallelen BC, DE solle gefunden werden; so schneide man HK in L so, daß HL zu LK das gegebene Verhältniß habe, welches die an BC zu ziehende Linie zu der an DE zu ziehenden haben soll. Soll aber der Punkt A ausserhalb der Parallelen, z. B. auf der Seite von BC liegen; so verlängere man KH bis L, so, daß HL zu LK das vorhin gesagte gegebene Verhältniß habe. Durch den Punkt L ziehe man eine gerade mit BC, DE gleichlaufende Linie; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man von irgend einem Punkt A auf derselben eine gerade Linie zieht, die den Parallelen BC, DE in F, G begegne; so wird AF zu AG sich verhalten, wie HL zu LK. Denn man ziehe KA, und es begegne KA der Linie BC in M; so ist wegen der Parallelen AF : AG = (AM : AK =) HL : LK, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Man sieht leicht, daß in dem Fall, wenn der Punkt A ausserhalb der Parallelen sollte gefunden werden, das Verhältniß, welches AG, die an die entferntere Parallele zu ziehende Linie zu AF, der an die nähere Parallele zu ziehenden Linie hat, das Verhältniß des grössern zum kleinern seyn müsse.

2. Fall. Wenn AF, AG unter den gegebenen Winkeln AFC, AGE gezogen werden, und zwar

Fig. 31. c.

a) wenn der Punkt A zwischen den Parallelen liegen soll.

Es begegne AG der Linie BC in H, und, weil der Winkel AGE gegeben ist; so ist auch der ihm gleiche AHF gegeben; es ist aber auch der Winkel AFH, mithin das Dreyek AHF der Gattung nach gegeben (43. D.); also ist das Verhältniß von AH zu AF gegeben,

nach der Voraussezung aber ist das Verhältniß von AF zu AG gegeben; mithin ist (9. D.) das Verhältniß von AH zu AG gegeben; also ist die gerade Linie, die durch A mit BC gleichlauffend gezogen wird, der Lage nach gegeben (40. D.); folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC ziehe man an die andere DE die gerade Linien HG, HK so, daß der Winkel HGE gleich werde dem gegebenen Winkel, den die an DE zu ziehende Linie mit DE machen soll, und der Winkel HKD gleich werde dem andern gegebenen Winkel. Es seye das Verhältniß, welches die an DE zu ziehende gerade Linie zu der an BC zu ziehenden haben soll, gleich dem Verhältniß von LH zu HK, und man schneide GH in A so, daß GA sich zu AH verhalte, wie LH zu HG, durch A ziehe man AM mit BC gleichlauffend; so wird AM der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AF, AG an die Parallelen unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird AG sich zu AF verhalten, wie LH zu HK. Denn nach der Verzeichnung ist

AG : AH = LH : HG. Es ist aber auch
AH : AF = HG : HK. Folglich gleichförmig (ex aequo)

AG : AF = LH : HK, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

b) Wenn der Punkt A ausserhalb der Parallelen liegt.

Analyse und Komposition bleiben wie bey dem 2ten Fall a, nur daß man den Punkt A auf der Verlängerung von GH nehmen muß. Auch sieht man leicht, daß,

daß, wie schon bey dem 1sten Fall erinnert worden, das Verhältniß, welches die an die entferntere Parallele zu ziehende Linie zu der an die nähere Parallele zu ziehenden hat, das Verhältniß des Grössern zum Kleinern seye.

23. Saz.

Fig. 32.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE, die einander in einem Punkt F begegnen, zwey gerade Linien AG, AH, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter den gegebenen Winkeln AGF, AHF gezogen werden, so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 32. a.

1. Fall. Wenn die Linien AG, AH mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien DE, BC gleichlauffend sind.

In diesem Fall ist die Figur AGFH ein Parallelogramm, und, weil das Verhältniß von AG zu AH, d. i. von AG zu GF nebst dem Winkel AGF gegeben ist; so ist das Dreyek AGF der Gattung nach gegeben (44. D.), also ist AF der Lage nach gegeben (32. D.).

Die Komposition ergiebt sich leicht. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt K auf der Linie BC eine mit DE gleichlauffende Linie, und nehme auf derselben KM so, daß KM zu KF in dem gegebenen Verhältniß seye. Man ziehe MF, und diß wird der gesuchte Ort seyn. Denn man nehme auf der Linie MF irgend einen Punkt A, und ziehe AG, AH mit FE, FC gleichlauffend; so ist AG : $\left\{\begin{matrix} AH \\ FG \end{matrix}\right.$ = KM : KF, d. i. in dem gegebenen

gebenen Verhältniß. In diesem Fall kann der Saz so ausgedrükt werden:

Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC eine gerade Linie AG unter einem gegebenen Winkel gezogen wird, und AG zu dem Stük GF, welches zwischen einem gegebenen Punkt F und der geraden Linie AG abgeschnitten wird, ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 32. b. c. d.

2. Fall. Wenn AG, AH auf der nemlichen geraden Linie liegen.

Weil das Verhältniß von GA zu AH gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von GH zu AH gegeben; und, weil das Dreyek FGH der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von FH zu GH gegeben; mithin ist das Verhältniß von FH zu AH gegeben (9. D.). Es ist aber auch der Winkel FHA gegeben, mithin das Dreyek AFH der Gattung nach (44. D.), also der Winkel AFH gegeben; es ist aber FH der Lage nach, und der Punkt F gegeben; mithin ist auch die Lage von FA (32. D.), d. i. von der Linie gegeben, welche der Punkt A berührt.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt L auf der Linie DE ziehe man an BC eine gerade Linie LK, so, daß der Winkel LKF gleich werde dem gegebenen Winkel, unter dem aus dem Punkt A an BC eine Linie gezogen werden soll. Und, wenn (Fig. 32. b.) LK den Seiten des Winkels CFE begegnet, d. i. wenn die Summe der Winkel CFE und AGB kleiner ist, als zwey rechte; so nehme man auf

auf der Linie LK selbst einen Punkt M, so, daß sich das Stük MK, das zwischen dem Punkt M und der Linie FC abgeschnitten ist, zu dem andern Stük ML verhalte, wie sich die aus A an BC zu ziehende Linie zu der an DE zu ziehenden verhalten soll. Ist hingegen (Fig. 32. c. d.) die Summe der Winkel CFE und AGB grösser als zwey rechte, d. i. begegnet die Linie LK dem Nebenwinkel von CFE; so verlängere man KL bis an einen Punkt M, so, daß KM zu ML das gegebene Verhältniß habe, welches die aus A an BC zu ziehende Linie zu der an DE zu ziehenden haben soll. In beyden Fällen ziehe man MF; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf der Linie MF eine mit LK gleichlauffende Linie zieht, die den Linien BC, DE in G, H begegne, so wird GA sich zu AH verhalten wie KM zu ML. Denn, wegen der Parallelen ist $AG : AF = KM : MF$

und auch $AF : AH = MF : ML$

folglich ex aequo $AG : AH = KM : ML$.

Hiebey ist klar, daß in dem Fall, wenn KL den Seiten des Nebenwinkels von CFE begegnet, und das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern ist, KL auf der Seite des Punkts L verlängert werden müsse. Ist hingegen das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so muß LK nach K hin verlängert werden.

Fig. 32. e. f.

3. Fall. Wenn die Linien AG, AH weder mit den der Lage nach gegebenen Linien BC, DE gleichlauffend sind, noch auf einerley geraden Linien liegen.

Es begegne AG, eine von denen aus A gezogenen Linien, der andern der Lage nach gegebenen Linie DE in K; so ist das Dreyek AHK der Gattung nach gegeben,

und,

und, weil das Verhältniß von AG zu AH, und auch das von AH zu AK gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von AG zu AK gegeben (9. D.), also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ten Fall dieses Sazes.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt L auf der Linie FC ziehe man an die andere der Lage nach gegebene Linie DE die gerade Linien LM, LN, welche mit den Linien BC, DE die gegebenen Winkel einschliessen, welche die aus dem Punkt A an BC, DE zu gleichende Linien mit diesen einschliessen sollen; und auf der Linie LM, welche mit BC einen Winkel macht gleich dem, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC machen soll, bestimme man den Punkt O so, daß OL zu LN das gegebene Verhältniß habe, welches die mit LM gleichlauffende durch den Punkt A gehende Linie zu der andern aus dem Punkt A gezogenen Linie haben soll. Und nach dem 2ten Fall dieses Sazes ziehe man innerhalb desjenigen von den Winkeln EFC, EFB, innerhalb dessen der Punkt A fallen soll, die gerade Linie FP so, daß sie ein Ort seye von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben die gerade Linie GK mit LM gleichlauffend zieht, GA sich zu AK verhalte, wie OL zu LM; so wird FP der gesuchte Ort seyn. Denn nach der Verzeichnung ist

$$GA : AK = OL : LM$$

Es ist aber $AK : AH = LM : LN$

folglich gleichförmig (ef aequo) $GA : AH = OL : LN$, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Wenn in dem Fall, da die gerade Linie LM innerhalb des Nebenwinkels von EFC fällt, das gegebene Verhältniß gleich ist dem Verhältniß von LM zu LN; so

so sieht man leicht, daß die gerade mit LM gleichlauffende Linie FP der gesuchte Ort seye. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben eine gerade Linie AH mit LN gleichlauffend zieht; so ist

$$\left.\begin{matrix}AF\\AG\end{matrix}\right\} : AH = LM : LN.$$

Zusaz. Der Ort geht immer durch den Durchschnitts-Punkt F der beyden der Lage nach gegebenen Linien BC, DE.

Berechnung.

Für alle Fälle ist

$$AH : AF = \sin. EFA : \sin. AHF \quad \text{und}$$
$$AF : AG = \sin. AGF : \sin. (CFE - EFA) \quad \text{folglich}$$

$$AH : AG = \sin. EFA . \sin. AGF : \sin. AHF . \sin. (CFE - EFA)$$
$$= \sin. AGF : \sin. AHF . (\sin. CFE . \operatorname{ctg} EFA - \cos\sin CFE)$$

Also ist $\operatorname{ctg} EFA = \frac{AG . \sin. AGF}{AH . \sin. AHF . \sin. CFE} + \operatorname{ctg} CFE.$

24. Saz.

Fig. 33.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien BC, DE zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linien AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder, wenn entweder der Ueberschuß der einen AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig.

Fig. 33. a. b. c. d.

I. Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linie AH (welche wir die erste heissen wollen) und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere aus A gezogene Linie AG (diese heisse die zweyte) ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist. Man verlängere AH nach der Seite von A hin, und schneide auf dieser Verlängerung die dritte Linie AK ab. Weil also an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC die der Grösse nach gegebene Linie HK unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; so berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20sten Saz. Es seye diß die Linie LM; so sind aus dem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallel-Linien DE, LM zwey gerade Linien AG, AK, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen; mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 22sten Saz. Soll nun (Fig. 33. a.)

1. der Punkt A ausserhalb der der Lage nach gegebenen Parallelen auf der Seite von BC liegen; so liegt auch LM ausserhalb dieser Parallelen auf eben der Seite; und, weil der Punkt A zwischen den Parallelen LM, DE liegt; so wird sein Ort gefunden nach 22. Saz 2. Fall a. Es kann aber das gegebene Verhältniß zwischen AG und AK so beschaffen seyn, daß der Punkt A zwischen die Parallelen BC, DE fallen müßte, und diß würde der vorigen Voraussezung widersprechen, also der Ort unmöglich seyn. Man muß deßwegen die Bestimmung finden, unter welcher der Punkt A immer ausserhalb der Parallelen BC, DE, und zwar nahmentlich zwischen BC, LM fallen wird. Es begegne demnach GA den Linien BC, LM in F, N, und man ziehe aus dem Punkt F an LM die Linie FO mit HK gleichlauffend.

send: Weil nun GA grösser seyn muß, als GF; so muß *) GA : AN > GF : FN seyn; nun ist AN : AK = FN : FO; folglich muß gleichförmig GA : AK > GF : FO seyn, d. i. das gegebene Verhältniß, welches die zweyte gerade Linie AG zu der dritten AK hat, welche mit der ersten AH eine gegebene Summe ausmacht, muß grösser seyn, als das Verhältniß, welches das von der zweyten Linie zwischen den Parallelen BC, DE abgeschnittene Stük GF zu FO oder HK der der Grösse nach gegebenen Linie hat. Wenn also der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite der Linie BC liegt, an welche nemlich die erste Linie AH gezogen werden soll; so ist folgendes die

Komposition.

Aus irgend einem Punkt F auf der Linie BC ziehe man die gerade Linie FO gleichlauffend mit der Linie, die aus A an eben diese Linie BC gezogen werden soll, und nehme ausserhalb der Parallelen FO gleich der gegebenen geraden Linie; durch O ziehe man LM mit BC gleichlauffend, an DE aber ziehe man FG gleichlauffend mit der Linie, die aus A an DE gezogen werden soll. Und nach dem 22. Saz 2. Fall a. ziehe man die gerade Linie AQ zwischen den Parallelen DE, LM; so, daß AQ ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben an die Linien DE, LM die Linien AG, AK mit FG, FO gleichlauffend zieht, das Verhältniß von AG zu AK dem gegebenen Verhältniß gleich seye, welches, wie gezeigt worden, grösser seyn muß, als das Verhältniß von GF zu FO;

 so

*) Weil GA > GF, und AN < FN; so ist GA : GF > AN : FN (7. Def. 5. E.), mithin GA : AN > GF : FN (27. 5. E.) A. d. U.

so wird AQ der gesuchte Ort seyn. Denn, weil AG : AK > GF : FO, und AK : AN = FO : FN; so ist gleichförmig AG : AN > GF : FN; also ist GA > GF, *) und der Punkt A fällt zwischen BC und LM. Nach der Verzeichnung aber ist GA zu AK in dem gegebenen Verhältniß. Wenn man also die Linie AK verlängert, bis sie BC in dem Punkt H schneidet; so ist die Summe von AH und der Linie AK, zu welcher AG das gegebene Verhältniß hat, gleich der gegebenen geraden Linie FO.

Fig. 33. b.

2. Wenn der Punkt A zwischen den Parallelen BC, DE liegen soll; so wird LM auf eben die Seite von BC fallen, auf welcher DE liegt, und zwar entweder zwischen die Parallelen BC, DE, oder auf DE selbst, oder ausserhalb der Parallelen BC, DE. Fällt LM zwischen die Parallelen BC, DE; so ist GA < GF, folglich **) GA : AN > GF : FN, und hieraus wird völlig, wie vorhin geschlossen, daß das gegebene Verhältniß von AG zu AK grösser seyn müsse, als das Verhältniß von GF zu FO, oder HK, und man findet AQ nach dem 22sten Saz 2. Fall b. Die Komposition bleibt übrigens völlig, wie die vorhergehende, nur daß man FO nach der Seite von DE ziehen muß. Fällt LM (Fig. 33. c) ausserhalb der Parallelen BC, DE; so

*) Weil AG : AN > GF : FN; so ist AN : AG < FN : GF (26, 5. E.) und AN + AG : AG < FN + GF : GF (28, 5. E.). Nun ist AN + AG = FN + GF, mithin AG > GF (10, 5. E.). A. d. U.

**) Weil AF = GF — GA = FN — AN, und AG > AN; so ist AG : GF — AG > AN : FN — AN (8, 5. E.) folglich AG : GF > AN : FN (28, 5. E.) oder AG : AN > GF : FN (27, 5. E.). A. d. U.

so ist AG kleiner als GF, und auch kleiner als AN, folglich ist *) AG : AN < GF : FN, und hieraus wird geschlossen, daß das gegebene Verhältniß von AG zu AK kleiner seyn müsse, als das Verhältniß von GF zu FO oder HK, und man findet AQ nach dem 22. Saz 2. Fall b. Die Komposition bleibt übrigens völlig wie vorhin, nur muß wieder FO gegen DE hin gezogen werden.

Fällt LM mit DE zusammen; so ist von selbst klar, daß das Verhältniß von GA zu AK einerley seye mit dem Verhältniß von GF zu FO.

Fig. 33. d.

5. Wenn der Punkt A ausserhalb der gegebenen Parallelen auf der Seite von DE liegen soll; so ist keine Bestimmung nöthig, als daß die gegebene gerade Linie HK grösser seyn muß, als das Stük davon, das zwischen den Parallelen BC, DE abgeschnitten wird, und die Komposition geschieht nach 22. Saz 2. Fall a.

Fig. 33. e. f. g.

II. Fall. Wenn der Ueberschuß der einen aus A gezogenen Linie AH über eine gegebene Linie HK zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat. Von AH nehme man die gegebene gerade Linie HK hinweg; so ist das Verhältniß des übrigen Stüks AK zu AG gegeben; und, weil an eine der Lage nach gegebene gerade Linie DE die der Grösse nach gegebene gerade Linie HK unter einem gegebenen Winkel KHE gezogen ist; so be-

*) Weil AF = GF — GA = FN — AN, und AG < AN; so ist FN — AN : AN < GF — AG : AG (8, 5. E.); folglich FN : AN < GF : AG (28, 5. E.) oder FN : GF < AN : AG (27, 5. E.). A. d. U.

rührt der Punkt K eine gerade mit DE gleichlauffende Linie (20. Saz). Diese Linie seye LM; weil nun aus einem Punkt A an die der Lage nach gegebene Parallelen LM, BC zwey gerade Linien AK, AG, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 22sten Saz. Soll nun (Fig. 33. e.) der Punkt A ausserhalb der Parallelen BC, DE auf die Seite von BC fallen; so kann die gerade Linie LM entweder zwischen den Parallelen, oder ausserhalb derselben auf der Seite von BC liegen, je nachdem die gegebene gerade Linie HK kleiner oder grösser ist, als das Stük HF, das zwischen den Parallelen DE und BC enthalten ist. Im ersten Fall muß das gegebene Verhältniß, welches AK zu AG hat, grösser seyn, als das Verhältniß von AF zu AG; im andern muß es kleiner seyn, als dieses Verhältniß (22. Saz 2. Fall b.). Soll aber der Punkt A (Fig. 33. f.) zwischen die Parallelen BC, DE fallen; so muß er auch zwischen BC und LM fallen, und es ist in diesem Fall keine Bestimmung nöthig, als daß die gegebene Linie HK kleiner seyn muß als HF. Soll endlich der Punkt A (Fig. 33. g.) ausserhalb der Parallelen auf die Seite von DE fallen; so muß er auch ausserhalb der Linien BC, LM liegen; mithin muß das gegebene Verhältniß zwischen AK und AG kleiner seyn als das Verhältniß zwischen AF und AG (22. Saz 2. Fall b.).

Die Komposition wird vermittelst des 22sten Sazes gemacht. Man ziehe nemlich aus irgend einem Punkt H auf der Linie DE eine gerade Linie HF, so, daß der Winkel FHE gleich seye dem gegebenen Winkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit DE machen soll; von HF nehme man die gegebene gerade Linie HK hinweg, und ziehe LKM mit DE gleichlauffend; nun ziehe man die gerade Linie AQ so, daß sie ein

ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf demselben die gerade Linien AK, AG an LM, BC unter den gegebenen Winkeln zieht, AK und AG das gegebene Verhältniß unter einander haben; so wird AQ der gesuchte Ort seyn. Denn es hat AK zu AG das gegebene Verhältniß, und HK ist gegeben; also hat der Ueberschuß von AH über die gegebene Linie HK zu AG das gegebene Verhältniß.

III. Fall. Hätte die Summe der einen von den gezogenen Linien und einer gegebenen Linie zur andern ein gegebenes Verhältniß; so würde der Ort auf ähnliche Art gefunden werden, oder es kann auch dieser Fall auf den IIten zurük gebracht werden. Denn, wenn die Summe einer gewissen Grösse und einer gegebenen Grösse zu einer andern Grösse ein gegebenes Verhältniß hat; so hat umgekehrt der Ueberschuß dieser lezten Grösse über eine gegebene Grösse zu der ersten ein gegebenes Verhältniß. (14. D.)

25. Saz.

Fig. 34.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE, die einander in F begegnen, zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder entweder der Ueberschuß der einen AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen, und einer gegebenen Linie zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 34. a.

I. Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linie AH, und einer dritten AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist.

Weil die der Grösse nach gegebene Linie HK eine der Lage nach gegebene Linie BC unter einem gegebenen Winkel FHK schneidet; so berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie (20. Saz). Es seye diß LK, und LK begegne der Linie DE in M. Weil nun aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebenen Linien DE, LK, die einander in M begegnen, zwey gerade Linien AG, AK, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt A eine gerade der Lage nach gegebene durch M gehende Linie (23. Saz und Zus.)

Komposition.

Man ziehe aus irgend einem Punkt H auf der gegebenen Linie BC die Linie HK gleich der gegebenen geraden Linie unter dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit dieser einschliessen soll, und durch K ziehe man LMK mit BC gleichlauffend. Vermittelst des 23sten Sazes ziehe man innerhalb des Winkels FML, oder innerhalb seines Nebenwinkels, je nachdem nemlich der Punkt A entweder innerhalb des Winkels EFB, oder innerhalb des Winkels EFC liegen soll, die Linie MN so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt A auf demselben an die Linien FE, LM die Linien AG, AK unter den gegebenen Winkeln zieht, AG, AK das gegebene Verhältniß unter einander haben; so wird das zwischen den Parallelen abgeschnit-

tene

tene Stük MN der gesuchte Ort seyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt A auf diesem Stük die Linien AH, AG an BC, DE unter den gegebenen Winkeln zieht, und AH verlängert, bis sie der Linie LM in K begegnet; so hat AG zu AK das gegebene Verhältniß; es ist aber die Summe von AH und AK gleich der gegebenen Linie AK.

Fig. 34. b. c.

II. Fall. Wenn der Ueberschuß der einen aus A gezogenen Linie AH über eine gegebene Linie HK, oder die Summe der einen AH und einer gegebenen Linie HK zur andern AG ein gegebenes Verhältniß hat.

Man nehme die gegebene Linie HK hinweg, oder seze sie hinzu; so hat der Rest, oder die Summe AK zu AG ein gegebenes Verhältniß, und es wird, wie bey dem vorhergehenden Saz bewiesen werden, daß der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie LM berühre; und, weil das Verhältniß der Linien AK, AG gegeben ist, welche aus einem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linien LM, DE unter gegebenen Winkeln gezogen werden, so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie MN, die vermittelst des 23sten Sazes gefunden wird. Aus irgend einem Punkt A auf derselben ziehe man an BC, DE unter den gegebenen Winkeln die gerade Linien AH, AG, und AH begegne der Linie LM in K. Weil nun AK nach der Verzeichnung zu AG das gegebene Verhältniß hat, und HK gegeben ist; so hat der Ueberschuß von AH über eine gegebene Grösse HK, oder die Summe von AH und HK zu der andern AG das gegebene Verhältniß.

In dem Fall, wenn AH, AG mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien DE, BC gleichlauffen, kann der Saz noch anders so ausgedrukt werden:

Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC, auf welcher der Punkt F gegeben ist, die Linie AH unter einem gegebenen Winkel gezogen wird, und die Summe einer der Linien AH, HF und einer dritten, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder, wenn entweder der Ueberschuß der einen der Linien AH, HF über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen, und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Zus. Wenn (Fig. 34. a.) aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BC, DE die gerade Linien AG, AH unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Rechteke, die zwischen diesen Linien, und zwey andern gegebenen Linien a, b enthalten sind, gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn es seye die Summe der Rechteke AG × a, und AH × b gleich dem Rechtek HK × b, wenn man nemlich HA gehörig verlängert bis K; so ist also das Rchtk HK × b gegeben, und, weil b gegeben ist, so ist HK der Grösse nach gegeben (61. D.). Man nehme das gemeinschaftliche Rchtk AH × b hinweg; so ist der Rest auf der einen Seite, d. i. das Rchtk AG × a gleich dem Rest auf der andern Seite, d. i. dem Rchtk AK × b; folglich ist AG : AK = b : a, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Linien BC, DE zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen worden, und HK die Summe der einen, und einer dritten AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; so berührt der Punkt A nach dem gegenwärtigen, oder, wenn

wenn BC, DE gleichlauffen, nach dem vorhergehenden Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

2. Zus. Auch, wenn (Fig. 34. b.) das eine der gegebenen Rechteke, z. B. AH×b um einen gegebenen Raum grösser ist, als das andere AG×a; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es seye der gegebene Raum gleich dem Rchtk HK×b, wo nemlich HK von HA hinweg genommen wird; so ist mithin HK gegeben. Und, weil nach der Voraussezung das Rchtk AH×b gleich ist der Summe der Rchtke AG×a, und HK×b; so ist, das gemeinschaftliche Rchtk HK×b hinweg genommen, das Rchtk AK×b gleich dem Rchtk AG×a; folglich ist das Verhältniß von AK zu AG gegeben, und, weil auch KH gegeben ist; so hat der Ueberschuß von AH über eine gegebene Grösse HK zu AG ein gegebenes Verhältniß; mithin berührt der Punkt A nach dem gegenwärtigen, oder, wenn BC, DE gleichlauffen, nach dem vorhergehenden Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Komposition dieser Zusäze ist, wie von selbst erhellet, einerley mit der Komposition des gegenwärtigen, oder des vorhergehenden Sazes.

Berechnung.

Für beyde Fälle ist sin. EFC : sin. KHB = HK : MF

und nach dem 23sten Saz

$$\text{ctg EMA} = \frac{\text{AK. sin. AHB}}{\text{AG. sin. AGF. sin. GMK}} + \text{ctg GMK},$$

Der Winkel GMK aber ist entweder dem Winkel CFE, oder seinem Nebenwinkel gleich.

26. Saz.

26. Saz.

Fig. 35.

Wenn drey gerade Parallel-Linien BC, DE, FG der Lage nach gegeben sind, und aus einem Punkt A an dieselbige drey gerade Linien AH, AK, AL unter gegebenen Winkeln AHB, AKD, ALF gezogen werden, und wenn die Summe der beyden Rechteke, wovon das eine zwischen einer der aus A gezogenen Linien AK, und einer gegebenen Linie $M\beta$, das andere zwischen einer andern aus A gezogenen Linie AL, und einer andern gegebenen Linie $N\gamma$ enthalten ist, gleich ist dem Rechtek, das zwischen der dritten aus A gezogenen Linie AH, und einer dritten gegebenen Linie $H\alpha$ enthalten ist: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 35. a.

1. Fall. Wenn die Linie AH, welche nebst einer gegebenen Linie $H\alpha$ das Rechtek enthält, welches der Summe der beyden übrigen Rechteke gleich ist, an eine der äussern Parallel-Linien BC gezogen ist, die wir die erste äussere, so wie die andere FG die zweyte äussere Parallele nennen wollen, und der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite der ersten äussern BC liegt.

Die Linie AH begegne den Parallelen DE, FG in den Punkten M, N, und weil das Dreyek AKM der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von AM zu AK gegeben; in eben diesem Verhältniß nun seye $M\beta$ zu $\alpha\delta$; da nun $M\beta$ gegeben ist; so ist auch $\alpha\delta$ gegeben, und das Rechtek $AM \times \alpha\delta$ ist gleich dem Rechtek $AK \times M\beta$. Eben so, weil das Verhältniß von AN zu AL gegeben ist, ist, wenn man $N\gamma$ zu δe in eben diesem

sem Verhältniß nimmt, $\delta\varepsilon$ gegeben, und das Rechtek AN $\times \delta\varepsilon$ gleich dem Rechtek AL $\times$ Nγ. Nach der Voraussezung aber ist das Rechtek AH $\times$ Hα gleich der Summe der Rechteke AK $\times$ Mβ, und AL $\times$ Nγ, folglich ist das Rechtek AHα gleich [der Summe der Rechteke AM $\times \alpha\delta$ und AH $\times \delta\varepsilon$, d. i. (1, 2. E.) gleich der Summe der Rechteke AH $\times \alpha\delta$, AM $\times \alpha\delta$, AH $\times \delta\varepsilon$, HN $\times \delta\varepsilon$, d. i. (1, 2. E.) gleich] der Summe der Rechteke AH $\times \alpha\varepsilon$, HM $\times \alpha\delta$, HN $\times \delta\varepsilon$, und, das gemeinschaftliche Rechtek AH $\times \alpha\varepsilon$ hinweg genommen, bleibt noch das Rechtek AHε gleich der Summe der Rechteke HM $\times \alpha\delta$, und HN $\times \delta\varepsilon$; es sind aber die Linien HM, HN der Grösse nach (35. D.) und eben so auch die Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ gegeben; mithin sind die Rechteke HM $\times \alpha\delta$, HN $\times \delta\varepsilon$, und das der Summe dieser beeden gleiche Rechtek AHε gegeben. Und, weil die Linie Hε der Grösse nach gegeben ist, so ist also auch AH der Grösse nach gegeben. Nun ist die Lage von BC und der Winkel AHB gegeben; mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie BC ziehe man an FG die gerade Linien HN, HR, HS, und zwar HN unter dem Winkel HNF, der gleich ist dem gegebenen Winkel, den die aus dem Punkt A an BC zu ziehende Linie mit BC; HR unter dem Winkel HRF gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit DE; und HS unter dem Winkel HSF, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an FG zu ziehende Linie mit FG einschliessen soll. Es seyen weiter Hα, Mβ, Nγ gleich den gegebenen Linien, welche die Seiten von den Rechteken seyn sollen, deren andere Seiten die aus dem Punkt A an BC, DE, FG

zu

zu ziehende Linien sind. Nun mache man wie NH zu HR, so $M\beta$ zu $\alpha\delta$, und trage $\alpha\delta$ auf die Linie αH aus dem Punkt α gegen H hin. Ferner mache man wie NH zu HS, so $N\gamma$ zu $\delta\varepsilon$, und trage $\delta\varepsilon$ aus dem Punkt δ gegen H hin. Und, weil bewiesen worden, daß das Rechtek $AH\alpha$ gleich seye der Summe der Rechteke $AH \times \alpha\varepsilon$, $HM \times \alpha\delta$, $HN \times \delta\varepsilon$, so muß folglich das Rechtek $AH\alpha$ grösser seyn als das Rechtek $AH \times \alpha\varepsilon$, also $H\alpha > \alpha\varepsilon$; folglich das Rechtek $NH\alpha > NH \times \alpha\varepsilon$, d. i. $NH\alpha > NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, d. i. wegen der angeführten Proportionen $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, und diß ist die Bestimmung für diesen Fall. Es seye also $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, so wird rükwärts geschlossen werden, daß auch $H\alpha$ grösser seye als $\alpha\varepsilon$.

Man mache ferner ein zwischen den Linien O, P enthaltenes Rechtek gleich der Summe der Rechteke $HM \times \alpha\delta$, und $HN \times \delta\varepsilon$ (45, 1. E.) und bestimme eine Linie Q, so, daß $H\varepsilon : O = P : Q$, verlängere dann NH nach A hin, und nehme $HA = Q$, durch den Punkt A ziehe man die gerade Linie AA mit BC gleichlauffend: so wird diese Linie AA der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AH, AK, AL an die Parallelen BC, DE, FG unter den gegebenen Winkeln, d. i. mit HN, HR, HS gleichlauffend zieht, so wird das Rechtek $AH\alpha$ gleich seyn der Summe der Rechteke $AK \times M\beta$ und $AL \times N\gamma$. Denn wegen der gleichlauffenden Linien ist $AM : AK =$ ($NH : HR$, d. i. nach der Verzeichnung $=$) $M\beta : \alpha\delta$; folglich das Rechtek $AM \times \alpha\delta = AK \times M\beta$. Eben so ist $AN : AL =$ ($NH : HS =$) $N\gamma : \delta\varepsilon$, mithin $AN \times \delta\varepsilon = AL \times N\gamma$. Es ist aber nach der Verzeichnung $H\varepsilon : O = P : AH$, mithin $AH \times H\varepsilon = O \times P$, d. i. nach der Verzeichnung $AH\varepsilon = HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$; man seze auf beeden Seiten noch gemeinschaftlich das

Rechtek

Rechtek $AH \times \alpha\varepsilon$, oder die beede Rechteke $AH \times \alpha\delta$ und $AH \times \delta\varepsilon$ hinzu, so ist das Rechtek $AH\alpha = AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon + HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$, d. i. (1, 2. E.) $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. wie schon bewiesen worden, $AH\alpha = AK \times M\beta + AL \times N\gamma$.

Fig. 35. b.

2. Fall. Wenn der Punkt A zwischen der ersten äussern Parallele BC, und der mittlern DE liegt, und das übrige wie im 1sten Fall bleibt.

Man bestimme hier die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie im ersten Fall, so wird auch wie dort bewiesen werden, daß das Rechtek $AH\alpha$ gleich seye der Summe der Rechteke $AM \times \alpha\delta$ und $AN \times \delta\varepsilon$, folglich ist, wenn man auf beyden Seiten das Rechtek $AH \times \alpha\varepsilon$ hinzusezt, das Rechtek $AH\varepsilon = (AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon + AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$, und, weil die Linien HM, HN, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, $H\varepsilon$ gegeben sind, so ist AH gegeben. Und der Punkt A berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie, welches wie beym 1sten Fall erwiesen wird.

Komposition.

Man ziehe die Linien HN, HR, HS, und finde $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie in der vorhergehenden Komposition, und trage sie aus den Punkten α, δ auf die verlängerte Linie $H\alpha$, und, weil der Punkt A nach der Voraussezung zwischen den Parallelen BC, DE liegt, so muß nothwendig MH grösser seyn als AH; mithin ist das Rechtek $MH\varepsilon > AH\varepsilon$, d. i. $MH\varepsilon > HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$, und, wenn man auf beyden Seiten das Rechtek $MH \times \alpha\varepsilon$, oder die beyde Rechteke $MH \times \alpha\delta$ und $MH \times \delta\varepsilon$ hinweg nimmt; so ist das Rechtek $MH\alpha > MN \times \delta\varepsilon$, folglich $MH : MN > \delta\varepsilon : H\alpha$, d. i. $MH : MN > NH \times \delta\varepsilon : NH\alpha$, d. i.

MH :

MH : MN > HS×Nγ : NHα, weil nemlich NH : HS = Nγ : δε. Und diß ist die Bestimmung für den 2ten Fall. Es seye also MH : MN > HS×Nγ : NHα, und man mache ein zwischen den Linien O und P enthaltenes Rechtek gleich der Summe der Rechteke HM×αδ, HN×δε, und bestimme Q so, daß Hε : O = P : Q, und auf der Linie HN nehme man von dem Punkt H aus HA = Q, so ist folglich das Rechtek AHε gleich dem Rechtek O×P, d. i. gleich der Summe der Rechteke HM×αδ und HN×δε. Und weil MH : MN > (HS×Nγ : NHα, d. i. > NH×δε : NHα, d. i. >) δε : Hα; so ist das Rechtek MHα grösser als das Rechtek MN×δε. Man seze das gemeinschaftliche Rechtek MH×αε hinzu; so ist das Rechtek MHε grösser als (die Summe der Rechteke MH×αε und MN×δε, d. i. grösser als die Summe der Rechteke MH×αδ und HN×δε, d. i. grösser als) das Rechtek AHε, also ist MH > AH, und der Punkt A fällt zwischen die Parallelen BC, DE. Durch diesen Punkt A ziehe man die Linie AA mit BC gleichlauffend; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AH, AK, AI. wie beym vorhergehenden Fall. Und, weil das Rechtek AHε gleich ist der Summe der Rechteke HM×αδ und HN×δε, so ist, wenn man das gemeinschaftliche Rechtek AH×αε hinweg nimmt, das Rechtek AHα gleich der Summe der Rechteke AM×αδ und AN×δε, d. i. der Summe der Rechteke AK×Mβ und AE×Nγ.

3. Fall. Wenn der Punkt A zwischen der zweyten äussern Parallele FG, und der mittlern DE liegt, und das übrige bleibt wie im 1sten Fall.

Man bestimme die Grösse der Linien αδ, δε wie beym ersten Fall; so wird, wie dort, bewiesen werden, daß das Rechtek AHα gleich seye der Summe der Rechteke AM×αδ und AN×δε, und wenn man noch die beyden Recht-

Rechteke NA × Hα und NA × $\alpha\delta$ hinzusezt; so ist die Summe der Rechteke NHα und NA × $\alpha\delta$ gleich der Summe der Rechteke NM × $\alpha\delta$, NA × Hα, NA × $\delta\varepsilon$. Die Rechteke NHα und NM × $\alpha\delta$ sind entweder unter einander ungleich, oder gleich. Sie seyen

a. ungleich, so ist der Unterschied der Summe der Rechteke NA × Hα, NA × $\delta\varepsilon$, und des Rechteks NA × $\alpha\delta$ gleich dem Unterschied der Rechteke NHα und NM × $\alpha\delta$, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Und weil die gerade Linien Hα, $\delta\varepsilon$, $\alpha\delta$ gegeben sind; so ist folglich auch AN gegeben; nun ist die Lage von FG, und der Winkel ANF gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Bestimmung.

Weil die Summe der Rechteke NHα und NA × $\alpha\delta$ gleich ist der Summe der Rechteke NM × $\alpha\delta$, NA × Hα, NA × $\delta\varepsilon$; so ist, wenn das Rechtek NH$\alpha \gtrless$ NM × $\alpha\delta$, auch NA × Hα + NA × $\delta\varepsilon \gtrless$ NA × $\alpha\delta$, mithin Hα + $\delta\varepsilon \gtrless \alpha\delta$, und, weil diß bey den in dem Saz gegebenen Stüken nicht immer nothwendig Statt findet; so wird der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Man muß also untersuchen, wie die gegebene Grössen beschaffen seyn müssen, damit nothwendig entweder Hα + $\delta\varepsilon > \alpha\delta$ oder Hα + $\delta\varepsilon < \alpha\delta$ werde.

Man ziehe also die Linien HN, HR, HS und finde $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie bey der Komposition des ersten Falls gezeigt worden, $\alpha\delta$ trage man auf die gerade Linie αH aus dem Punkt α nach H hin; $\delta\varepsilon$ aber aus dem Punkt δ nach entgegengesezter Richtung.

Fig. 35. c.

Nun seye

1) das Rechtek NHα > NM×$\alpha\delta$, so ist NH : NM > ($\alpha\delta$: Hα, d. i. > NH×$\alpha\delta$: NHα, d. i. >) HR×Mβ : NHα, weil nemlich NH : HR = Mβ : $\alpha\delta$. Die erste Voraussezung bey den gegebenen Grössen seye also diese, daß NH : NM

A. > HR×Mβ : NHα; so wird rükwärts geschlossen werden, es seye NHα > NM×$\alpha\delta$, mithin ist nach dem, was vorhin gesagt worden, auch NA×Hα + NA×$\delta\varepsilon$ > NA×$\alpha\delta$ und dann muß nothwendig Hα + $\delta\varepsilon$ grösser seyn als $\alpha\delta$. Es muß also die Summe der Rechteke NHα und NH×$\delta\varepsilon$ grösser seyn, als NH×$\alpha\delta$, d. i. (weil NH : HS = Nγ : $\delta\varepsilon$) es muß die Summe der Rechteke NHα und HS×Nγ grösser seyn als das Rechtek HR×Mβ. Und, wenn diß leztere gesezt wird, so wird man rükwärts schliessen

B. können, es seye Hα + $\delta\varepsilon$ > $\alpha\delta$.

Weil überdiß vorausgesezt wird, der Punkt A liege zwischen den Parallelen DE, FG, so muß NM grösser seyn als NA. Nun ist bewiesen worden, daß die Summe der Rechteke NHα und NA×$\alpha\delta$ gleich seye der Summe der Rechteke (NM×$\alpha\delta$, NA×Hα, NA×$\delta\varepsilon$, d. i. weil Hα + $\delta\varepsilon$ = $\alpha\delta$ + Hε, gleich der Summe der Rechteke) NM×$\alpha\delta$, NA×$\alpha\delta$, NA×Hε; folglich ist, das gemeinschaftliche Rechtek NA×$\alpha\delta$ hinweg genommen, das Rechtek NHα gleich der Summe der Rechteke NM×$\alpha\delta$, und NA×Hε. Und, weil NM > NA; so ist NM×$\alpha\delta$ + NM×Hε > (NM×$\alpha\delta$ + NA×Hε, d. i. >) NHα; folglich, weil $\alpha\delta$ + Hε = Hα + $\delta\varepsilon$, die Summe der Rechteke NM×Hα und NM×$\delta\varepsilon$ grösser, als das Rechtek NHα; und, wenn man das gemeinschaftliche Rechtek NM×Hα hinweg nimmt, so ist das Rechtek NM×$\delta\varepsilon$ grösser als das Rechtek MHα. Mithin muß das Ver-

Verhältniß von NM zu MH grösser seyn, als das Verhältniß von ($H\alpha$ zu $\delta\epsilon$, d. i. grösser als das Verhältniß des Rechteks $NH\alpha$ zu dem Rechtek $NH \times \delta\epsilon$, d. i. grösser als das Verhältniß von) dem Rechtek $NH\alpha$ zu dem Rechtek $HS \times N\gamma$. Und umgekehrt,
C. wenn $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, so kann man die ganze Reihe dieser Schlüsse wieder rükwärts durchmachen, und beweisen, daß NM grösser seye als NA.

Bey der ersten Voraussezung also, nach welcher man nemlich annimmt, daß $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, müssen überdiß nothwendig auch diese beyde Bedingungen noch Statt finden, 1. daß $NH\alpha + HS \times N\gamma > HR \times M\beta$, und 2. daß $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$.

Diese lezte Bedingung nun ist bey gegenwärtiger Voraussezung zur Bestimmung schon hinreichend, denn aus dieser und der Voraussezung folgt die erste
D. Bedingung nothwendig. Denn, weil $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, so ist $HS \times N\gamma : NH\alpha > MH : NM$, und verbunden (componendo) $HS \times N\gamma + NH\alpha : NH\alpha > NH : NM$. Nach der Voraussezung aber ist $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, mithin noch vielmehr $HS \times N\gamma + NHA : NH\alpha > HR \times M\beta : NH\alpha$. Also $HS \times N\gamma + NH\alpha > HR \times M\beta$, und diß war eben die erste Bedingung. Aus dieser ersten Bedingung und der Voraussezung aber folgt die 2te Bedingung noch nicht, und eben so wenig folgt aus den beyden Bedingungen allein die Voraussezung.

Fig. 35. d.

Es seye

2) $NH\alpha < NM \times \alpha\delta$, so wird auf ähnliche Art, wie oben, gezeigt werden, es müsse auch $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$ seyn.

Die zweite Voraussezung seye also, daß $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$, so wird rükwärts geschlossen werden, es seye auch $NH\alpha < NM \times \alpha\delta$. Und, weil bewiesen worden, daß $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; so ist $NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon < NA \times \alpha\delta$; also $H\alpha + \delta\varepsilon < \alpha\delta$. Mithin ist auch $NH\alpha + NH \times \delta\varepsilon < NH \times \alpha\delta$, d. i. $NH\alpha + HS \times N\gamma < HR \times M\beta$. Und, diß leztere vorausgesezt, kann man rükwärts schliessen, es seye $H\alpha + \delta\varepsilon < \alpha\delta$. Es wird überdiß vorausgesezt, daß $NM > NA$. Es ist aber $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$, und in diesem Fall ist $\alpha\delta = \alpha H + H\varepsilon + \varepsilon\delta$; folglich, wenn man die beyden Rechteke $NA \times H\alpha$ und $NA \times \delta\varepsilon$ auf beyden Seiten hinweg nimmt, so ist $NH\alpha + NA \times H\varepsilon = NM \times \alpha\delta$. Und, weil $NM > NA$; so ist $NH\alpha + NM \times H\varepsilon >$ ($NH\alpha + NA \times H\varepsilon$, d. i. $>$) $NM \times \alpha\delta$; und, auf beeden Seiten die Rechteke $NM \times H\alpha$ und $NM \times H\varepsilon$ hinweg genommen, so ist $MH\alpha > NM \times \delta\varepsilon$. Mithin $NM : MH <$ ($H\alpha : \delta\varepsilon$, d. i. $< NH\alpha : NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $<$) $NH\alpha : HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$; so wird rükwärts geschlossen werden, daß $MH\alpha > NM \times \delta\varepsilon$; und $NM > NA$ seye.

Wenn also $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$, so müssen nothwendig noch diese beyden Bedingungen Statt finden, daß 1) $NH\alpha + HS \times N\gamma < HR \times M\beta$, und daß 2) $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$. Diese lezte Bedingung aber ist zur Bestimmung schon hinreichend, denn aus dieser und der Voraussezung folgt nothwendig

dig die erste Bedingung, welches, wie vorhin, bewiesen wird.

Diese Bestimmungen voraus geschikt, ist für den dritten Fall in bemeldeten 2. Voraussezungen folgendes die

Komposition.

Man ziehe HN, HR, HS, und bestimme die Grösse und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie gesagt worden. Nun seye

Fig. 35. c.

1. $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, und zugleich $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$; so ist auch, wie *) gezeigt worden, $NH\alpha + HS \times N\gamma > HR \times M\beta$, und daher **) $H\alpha + \delta\varepsilon > \alpha\delta$. Und, weil $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, so ist ***) $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$. Man mache ein Rechtek $O \times P$ gleich dem Ueberschuß des Rechteks $NH\alpha$ über das Rechtek $NM \times \alpha\delta$, d. i. es seye $NH\alpha = NM \times \alpha\delta + O \times P$. Nun bestimme man Q so, daß $H\varepsilon : O = P : Q$, und auf die gerade Linie NH trage man aus dem Punkte N nach H hin die gerade Linie $NA = Q$; so ist folglich $NA \times H\varepsilon = O \times P$, daher ist $NM \times \alpha\delta + NA \times H\varepsilon = NH\alpha$; man seze auf beyden Seiten noch das Rechtek $NA \times \alpha\delta$ hinzu; so ist $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = (NM \times \alpha\delta + NA \times H\varepsilon + NA \times \alpha\delta$, d. i. weil $H\varepsilon + \alpha\delta = H\alpha + \delta\varepsilon| =) NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$. Folglich, weil nach der Voraussezung $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, so ist †) $NM > NA$. Mithin fällt der Punkt A zwischen die Parallelen DE, FG. Durch diesen Punkt ziehe man eine gerade, mit BC gleichlauffende Linie; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man nehme auf derselben irgend einen

 Punkt

*) siehe D. **) s. B. ***) s. A. †) s. C.

Punkt A, und ziehe daraus die Linien, wie beym ersten Fall. Und, weil gezeigt worden, daß $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; so ist, wenn man auf beyden Seiten die Rechteke $NA \times H\alpha$ und $NA \times \alpha\delta$ hinweg nimmt, das Rechtek $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + NA \times \delta\varepsilon$, d. i. $=)$ $AK \times M\beta + AL \times N\gamma$.

Fig. 35. d.

2. Diß wird eben so bewiesen werden bey der 2ten Voraussezung, wenn nemlich $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$, und wo folglich auch $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$ seyn muß.

Fig. 35. e.

Es seye nun aber

b. $NH\alpha = NM \times \alpha\delta$; und, weil $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; so ist auch $NA \times \alpha\delta = NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$. Die gerade Linie NA ist also hier keineswegs gegeben, und es kann mithin in diesem Fall der Punkt A überall zwischen den Parallelen DE, FG angenommen werden, zwischen welchen er der Voraussezung nach liegen muß.

Bestimmung.

Weil aber $NH\alpha = NM \times \alpha\delta$; so ist $NH : NM = (\alpha\delta : H\alpha = NH \times \alpha\delta : NH\alpha =)$ $HR \times M\beta : NH\alpha$. Es seye also

Die dritte Voraussezung bey den gegebenen Grössen diese, daß $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$; so wird rükwärts geschlossen werden, es seye $NH\alpha = NM \times \alpha\delta$; folglich ist, wie gezeigt worden, $NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon = NA \times \alpha\delta$, also nothwendig $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta$,

$= \alpha\delta$, d. i. es muß der Punkt ε auf dem Punkt H fallen. Mithin ist $NH\alpha + NH \times \delta\varepsilon = NH \times \alpha\delta$, d. i. $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$. Und, wenn diß lezte vorausgesezt wird; so kann rükwärts geschlossen werden, daß $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta$.

Komposition.

Man ziehe die Linien NH, HR, HS u. s. w. wie bey der vorhergehenden Komposition, und es seye $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$, und zugleich $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$. Man nehme irgend einen Punkt A zwischen den Parallelen DE, FG, und ziehe aus ihm die Linien AH, AK, AL wie beym ersten Fall; so ist das Rechtek $AH\alpha$ gleich der Summe der Rechteke $AK \times M\beta$ und $AL \times N\gamma$. Denn, weil $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$; so ist, wie gezeigt worden, $NH\alpha = NM \times \alpha\delta$. Und, weil $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$; so ist $H\alpha + \delta\varepsilon = \alpha\delta$. Folglich ist $NA \times \alpha\delta = NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$, und, wenn man eines der gleichen Rechteke $NH\alpha$, $NM \times \alpha\delta$ auf jeder Seite hinzu sezt; so ist $NH\alpha + NA \times \alpha\delta = NM \times \alpha\delta + NA \times H\alpha + NA \times \delta\varepsilon$; und, die beyden Rechteke $NA \times H\alpha$ und $NA \times \alpha\delta$ von beyden Seiten weggenommen, ist $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + NA \times \delta\varepsilon$, d. i. $=)$ $AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. Mithin erhält man bey diesem lezten Glied des dritten Falls, statt eines Orts einen Lehrsaz.

Fig. 35. f.

4. Fall. Wenn der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite der zweyten äussern liegt, und das übrige wie beym ersten Fall bleibt.

Man bestimme die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie beym ersten Fall; so wird, wie dort, bewiesen werden,

 daß

daß $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, und, wenn man auf beyden Seiten die Rechteke $MH \times \alpha\delta$, $NH \times \delta\varepsilon$ hinzu sezt, so ist $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$, folglich der Unterschied der Summe der Rechteke $AH \times \alpha\delta$ $AH \times \delta\varepsilon$, und des Rechteks $AH\alpha$ gleich der Summe der Rechteke $MH \times \alpha\delta$ und $NH \times \delta\varepsilon$, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Nun sind die Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, $H\alpha$ gegeben, mithin ist AH gegeben, und der Punkt A berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie, wie beym ersten Fall gezeigt worden.

Bestimmung.

Man ziehe HN, HR, HS, und bestimme die Grösse und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie beym ersten Fall. Und, weil $AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon > AH\alpha$; so ist $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$, also $NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NH\alpha$, d. i. $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$. Und umgekehrt, wenn $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$; so wird man rükwärts schliessen können, daß auch $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$.

Ueberdiß, weil vorausgesezt wird, der Punkt A liege ausserhalb der Parallelen auf der Seite von FG, so muß AH grösser seyn, als NH. Es ist aber $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = (AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$, d. i. $=)$ $AH \times \alpha\varepsilon$; folglich, das gemeinschaftliche Rechtek $AH\alpha$ abgezogen, $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH\varepsilon$. Und, weil $AH > NH$, so ist $AH\varepsilon$ oder $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NH\varepsilon$; und, das Rechtek $NM \times \alpha\delta$ auf beeden Seiten hinzu gesezt, $NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon > NM \times \alpha\delta + NH\varepsilon$; endlich, das gemeinschaftliche Rechtek $NH\varepsilon$ abgezogen, ist $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$. Also $NH : NM > (\alpha\delta : H\alpha$, d. i. $> NH \times \alpha\delta : NH\alpha$, d. i. $>)$ $HR \times M\beta : NH\alpha$. Umgekehrt, wenn $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; so wird man rükwärts schlies-

schliessen können, daß $NH\alpha > NM \times \alpha\delta$; und $AH > NH$ seye.

Also muß in dem 4ten Fall $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$, und zugleich $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$ seyn. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Man ziehe NH, HR, HS, und bestimme Grösse und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie vorhin gesagt worden. Weil nun nach der voraus geschikten Bestimmung $HR \times M\beta + HS \times N\gamma > NH\alpha$; so ist $\alpha\delta + \delta\varepsilon > H\alpha$. Man mache ein Rechtek $O \times P = MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, und bestimme eine Linie HA so, daß $H\varepsilon : O = P : HA$, diese Linie HA trage man auf HN aus dem Punkt H gegen N hin. Es ist also $O \times P$, d. i. $MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH\varepsilon$; und auf beyden Seiten das Rechtek $AH\alpha$ hinzu gesezt, $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = (AH \times \alpha\varepsilon$, d. i. $=) AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$. Weil nun nach dem andern Theil der Bestimmung $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; so ist $AH > NH$. Folglich fällt der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf die Seite von FG. Man ziehe durch ihn eine mit BC gleichlauffende Linie; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man nehme auf derselben irgend einen Punkt A, und ziehe aus demselben die gerade Linien an die Parallelen, wie im ersten Fall; und, weil bewiesen worden, daß $AH\alpha + MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon = AH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon$; so ist, die gemeinschaftliche Rechteke $MH \times \alpha\delta$, $NH \times \delta\varepsilon$ hinweg genommen, $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$.

Fig. 35. g.

5. Fall. Wenn die Linie AH, welche nebst einer gegebenen Linie $H\alpha$ das Rechtek enthält, welches der

Summme der beyden übrigen Rechteke gleich ist, an die mittlere Parallele DE gezogen ist, und der Punkt A ausserhalb der Parallelen auf der Seite von BC oder von FG liegt.

Die Linie AH begegne den Parallelen BC, FG in den Punkten M, N, und man bestimme die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im ersten Fall; so wird, wie dort, bewiesen werden, es seye $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $AM \times HA + MH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=)$ $AM \times \alpha\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$. Nun sind die Rechteke $MH\alpha$, $MN \times \delta\varepsilon$ entweder ungleich, oder gleich. Sie seyen

a. ungleich; so ist folglich der Unterschied der Rechteke $AM \times H\alpha$ und $AM \times \alpha\varepsilon$ gleich dem Unterschied der Rechteke $MN \times \delta\varepsilon$ und $MH\alpha$, d. i. gleich einem gegebenen Raum. Und, weil $H\alpha$, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ gegeben sind, so ist AM gegeben. Weil ferner die Lage von BC und auch der Winkel AMB gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Bestimmung.

Aus irgend einem Punkt H auf der geraden Linie DE ziehe man an FG die Linien HN, HR, HS, und bestimme Grösse und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im ersten Fall. Nun seye

1) $MN \times \delta\varepsilon > MH\alpha$; so ist folglich $MN : MH > (H\alpha : \delta\varepsilon$, d. i. $> NH\alpha : NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $>) NH\alpha : HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $MN : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$; so wird man auch schliessen können, es seye $MN \times \delta\varepsilon > MH\alpha$. Weil nun bewiesen worden, daß $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$; so ist $AM \times H\alpha > AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$; also

also $H\alpha > \alpha\delta + \delta\varepsilon$; folglich $NH\alpha > (NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon$, d. i. $>)$ $HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Und umgekehrt, wenn $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so wird man rükwärts schliessen können, daß auch $H\alpha > \alpha\delta + \delta\varepsilon$.

Wenn also $MN : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß seye die 1ste Voraussezung) so muß auch $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn.

2. Es seye $MN + \delta\varepsilon < MH\alpha$; so wird auf ähnliche Art gezeigt werden, daß $MN : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$; und umgekehrt. Und hieraus wird man auch auf ähnliche Art schliessen, es seye $H\alpha < \alpha\delta + \delta\varepsilon$; folglich $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, und umgekehrt.

Wenn also $MN : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß seye die 2te Voraussezung), so muß auch $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn.

Diese Bestimmungen vorausgeschikt, ist für den 5ten Fall bey bemeldten zween Voraussezungen folgendes die

Komposition.

Man ziehe HN, HR, HS und bestimme die Grösse und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, wie gesagt worden. Nun sey 1. $MN : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so ist wegen der lezten Bedingung, wie gezeigt worden, $H\alpha > \alpha\delta + \delta\varepsilon$. Und wegen der ersten Bedingung ist, wie gezeigt worden, $MN \times \delta\varepsilon > MH\alpha$. Man mache das Rechtek $O \times P$ gleich dem Ueberschuß des Rechteks $MN \times \delta\varepsilon$ über das Rechtek $MH\alpha$, d. i. es seye $MN \times \delta\varepsilon = MH\alpha + O \times P$. Nun bestimme man MA so, daß $H\varepsilon : O = P : MA$, und trage MA auf die verlängerte Linie HM ausserhalb der Parallelen nach der Seite BC hin, durch den Punkt A

ziehe

ziehe man eine mit BC gleichlauffende Linie, so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn aus irgend einem Punkt A auf derselben ziehe man an die Parallelen DE, BC, FG die Linien AH, AK, AL mit HN, HR, HS gleichlauffend. Und weil nach der Verzeichnung $AM \times H\epsilon = O \times P$; so ist auf beyden Seiten das Rechtek $MH\alpha$ hinzu gesezt, $MH\alpha + AM \times H\epsilon = (MH\alpha + O \times P$, d. i. $=) MN \times \delta\epsilon$. Man seze beederseits das Rechtek $AM \times \alpha\epsilon$, oder $AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\epsilon$ hinzu; so ist $MH\alpha + AM \times H\alpha$, d. i. $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\epsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. 2. Eben dieses wird aber auf eben diese Art bey der 2ten Voraussezung bewiesen werden, wo nemlich $MN : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$, und deßwegen $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$.

b. Es seye $MH\alpha = MN \times \delta\epsilon$; so ist, weil $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\epsilon + MN \times \delta\epsilon$; auch $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\epsilon$. Es wird also die Linie AM keineswegs gegeben seyn, und der Punkt A überall ausserhalb der Parallelen auf derjenigen Seite von BC angenommen werden können, auf welcher er nach der Voraussezung liegen soll.

Bestimmung.

Weil aber $MN \times \delta\epsilon = MH\alpha$; so ist $MN : MH = (H\alpha : \delta\epsilon = NH\alpha : NH \times \delta\epsilon$, d. i. $=) NH\alpha : HS \times N\gamma$.

Wenn also $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$ (und diß seye die 3te Voraussezung); so wird rükwärts geschlossen werden, daß $MH\alpha = MN \times \delta\epsilon$; folglich ist, wie gezeigt worden, $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\epsilon$; folglich $H\alpha = \alpha\delta + \delta\epsilon$; also $NH\alpha = (NH \times \alpha\delta + NH \times \delta\epsilon$, d. i. $=) HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Und, wenn

wenn diß lezte gesezt wird; so wird umgekehrt geschlossen werden, es seye $H\alpha = \alpha\delta + \delta\varepsilon$.

Komposition.

Man ziehe HN, HR, HS, und bestimme die Grösse und Lage der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie bey der vorhergehenden Komposition; und es seye $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$. Nun nehme man ausserhalb der Parallelen auf der Seite von BC irgend einen Punkt A, und ziehe aus demselben an die Parallelen DE, BC, FG die Linien AH, AK, AL mit HN, HR, HS gleichlauffend; so wird $AH\alpha = AK \times M\beta + AL \times M\gamma$ seyn. Denn, weil $MN : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$; so ist, wie vorhin gezeigt worden, $MH\alpha = MN \times \delta\varepsilon$. Und, weil $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so ist $H\alpha = \alpha\delta + \delta\varepsilon$. Also $AM \times H\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon$, und, eines der gleichen Rechteke $MH\alpha$, $MN \times \delta\varepsilon$ hinzu gesezt, $AM \times H\alpha + MH\alpha = AM \times \alpha\delta + AM \times \delta\varepsilon + MN \times \delta\varepsilon$, d. i. $AH\alpha =$ ($AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=$) $AK \times M\beta + AL \times N\gamma$. Also verwandelt sich auch in diesem Fall der Ort in einen Lehrsaz.

Fig. 35. h.

6. Fall. Wenn der Punkt A zwischen den Parallelen, z. B. zwischen BC, DE, liegt, und das übrige bleibt, wie beym vorigen Fall.

Man bestimme die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie im ersten Fall; so wird, wie dort, gezeigt werden, daß $AH\alpha = AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$. Man seze auf beyden Seiten das Rechtek $AH \times \alpha\delta$ hinzu; so ist $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon + HN \times \delta\varepsilon$. Also ist der Ueberschuß der Summe der Rechteke $AH\alpha$ und $AH \times \alpha\delta$

$AH \times \alpha\delta$ über das Rechtek $AH \times \delta\varepsilon$ gleich der Summe der Rechteke $MH \times \alpha\delta$ und $HN \times \delta\varepsilon$, d. i. gleich einem gegebenen Raum; und, weil $H\alpha$, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ gegeben sind; so ist AH gegeben. Nun ist aber die Lage von DE, und auch der Winkel AHD gegeben; folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Bestimmung.

Man ziehe die Linien HN, HR, HS wie beym vorhergehenden Fall, und finde die Grösse der Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie beym ersten Fall, $\alpha\delta$ trage man auf die verlängerte Linie $H\alpha$ nach der Seite von α hin, $\delta\varepsilon$ hingegen nach entgegengesezter Richtung. Und, weil das Rechtek $AH \times \delta\varepsilon$ von der Summe der Rechteke $AH\alpha$ und $AH \times \alpha\delta$ abgezogen werden muß, so muß $H\alpha + \alpha\delta > \delta\varepsilon$ seyn; also muß $NH\alpha + NH \times \alpha\delta > NH \times \delta\varepsilon$ seyn; d. i. es muß $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$ seyn. Und, wenn diß ist; so wird rükwärts geschlossen werden, daß auch $H\alpha + \alpha\delta > \delta\varepsilon$ seyn.

Ueberdiß, weil erfodert wird, daß der Punkt A zwischen den Parallelen BC, DE seye; so muß $MH > AH$ seyn. Es ist aber gezeigt worden, daß $AH\alpha + AH \times \alpha\delta$, d. i. $AH\delta = MH \times \alpha\delta + AH \times \delta\varepsilon + HN \times \delta\varepsilon$; folglich ist, das Rechtek $AH \times \delta\varepsilon$ hinweg genommen, $AH\varepsilon = MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$. Und, weil $MH > AH$; so ist $MH\varepsilon >$ ($AH\varepsilon$, d. i. $>$) $MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$. Man seze auf beyden Seiten das Rechtek $MH \times \varepsilon\alpha$ hinzu; so ist $MH\alpha >$ ($MH \times \delta\varepsilon + HN \times \delta\varepsilon$, d. i. $>$) $MN \times \delta\varepsilon$. Also ist $MH : MN >$ ($\delta\varepsilon : H\alpha$, d. i. $> NH \times \delta\varepsilon : NH\alpha$, d. i. $>$) $HS \times N\gamma : NH\alpha$. Und, wenn $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$; so wird rükwärts geschlossen werden, daß $MH\alpha > MN \times \delta\varepsilon$; und $MH > AH$ seye.

Im

Im 6ten Fall muß also $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$; und zugleich $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$ seyn.

Diese lezte Bedingung aber ist zur Bestimmung dieses Falls schon hinreichend, denn die erste folgt nothwendig aus derselben. Denn das Verhältniß von MH zu MN ist das Verhältniß des kleinern zum grössern; also da $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$, so ist $HS \times N\gamma < NH\alpha$; folglich $NH\alpha > HS \times N\gamma$; also noch vielmehr $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Man ziehe NH, HR, HS, und finde die Grösse und Lage von $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ wie gesagt worden. Es seye $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$; so folgt daraus, wie eben gezeigt worden, daß $NH\alpha + HR \times M\beta > HS \times N\gamma$. Es ist also $H\alpha + \alpha\delta > \delta\varepsilon$. Man mache das Rechtek $O \times P = MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$, und bestimme HA so, daß $H\varepsilon : O = P : HA$, diese Linie HA trage man auf die verlängerte Linie NH gegen BC hin. Es ist also $AH\varepsilon = (O \times P$, d. i. $=)$ $MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon$. Man seze auf beyden Seiten das Rechtek $AH \times \delta\varepsilon$ hinzu; so sind $AH\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$, d. i. $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$. Folglich, weil $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$, so ist $MH > AH$. Es fällt also der Punkt A zwischen die Parallelen BC, DE, durch den Punkt A ziehe man eine gerade mit BC gleichlaufende Linie; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A in derselbigen die gerade Linien wie bey dem 5ten Fall. Weil nun $AH\alpha + AH \times \alpha\delta = MH \times \alpha\delta + NH \times \delta\varepsilon + AH \times \delta\varepsilon$, wie bewiesen worden; so ist, das gemeinschaftliche Rechtek

$AH \times \alpha\delta$

$AH \times \alpha\delta$ hinweg genommen, $AH\alpha = (AM \times \alpha\delta + AN \times \delta\varepsilon$, d. i. $=) AK \times M\beta + AL \times N\gamma$.

Wenn also die gerade Linien HN, HR, HS gezogen worden, und die Linien $H\alpha$, $M\beta$, $N\gamma$ der Grösse nach gegeben sind, so ist $NH\alpha$ entweder grösser, oder kleiner als die Summe der Rechteke $HR \times M\beta$ und $HS \times N\gamma$, oder dieser Summe gleich. Wenn $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so kann ein Ort gefunden werden nach dem 1sten Fall, wenn nemlich erfodert wird, daß die Linie AH, welche nebst einer gegebenen $H\alpha$ das der Summe der beyden übrigen gleiche Rechtek einschließt, an eine der äussern Parallelen gezogen seye. Und, wenn zugleich $MH : MN > HS \times N\gamma : NH\alpha$; oder, welches einerley ist, wenn $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$; so kann noch ein anderer Ort gefunden werden nach dem 2ten Fall. Nach dem 3ten Fall hingegen kann, so lang diese beyde Bedingungen bleiben, kein Ort gefunden werden, denn das Verhältniß von NH zu NM ist das Verhältniß des grössern zum kleinern, das Rechtek $HR \times M\beta$ ist kleiner als das Rechtek $NH\alpha$; mithin ist $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, und deßwegen müßte nach der Bestimmung des 3ten Falls $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$ seyn. Nach der Voraussezung aber ist $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$. Und weil bey dem 4ten Fall erfodert wird, daß $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seye; so wird auch nach diesem Fall kein Ort gefunden werden können.

Ist aber $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; und zugleich $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$; so kann für den 2ten Fall kein Ort gefunden werden. Weil aber gezeigt worden, daß $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; so wird ein Ort nach dem 3ten Fall gefunden.

Ist $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so kann der Ort nicht nach dem 1sten Fall gefunden werden. Aber, wenn

wenn zugleich $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$; so kann ein Ort nach dem 2ten Fall gefunden werden. Und, wenn überdiß noch $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$; so findet man noch einen andern Ort nach dem 3ten, hingegen keinen nach dem 4ten Fall, weil bey dem 4ten Fall immer $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$ seyn muß. Ist hingegen $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$, und bleiben die 2. übrigen angeführten Bedingungen, so findet man nicht nach dem 3ten, sondern nach dem 4ten Fall einen Ort.

Ist $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; und zugleich $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$; so kann nach dem 1sten und 2ten Fall kein Ort gefunden werden. Wenn aber überdiß noch $NH : NM > HR \times M\beta : NH\alpha$; so findet man einen Ort nach dem 3ten, und auch einen nach dem 4ten Fall. Ist hingegen $NH : NM < HR \times M\beta : NH\alpha$, und die 2. übrigen angeführten Bedingungen bleiben; so giebt es nach keinem der 4 ersten Fälle, mithin gar keinen Ort.

Endlich, wenn $NH\alpha + HS \times N\gamma = HR \times M\beta$, und zugleich $NH : NM = HR \times M\beta : NH\alpha$; so wird jeder Punkt zwischen den Parallelen den Foderungen des Sazes ein Genüge thun.

Ist $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so kann nach dem 1sten, 3ten und 4ten Fall kein Ort gefunden werden, wenn aber noch überdiß $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$; so kann man nach dem 2ten Fall einen finden.

Würde hingegen erfodert, daß die Linie AH, welche nebst einer gegebenen Linie $H\alpha$ das der Summe der beyden übrigen gleiche Rechtek einschließt, an die mittlere Parallele gezogen werde; so wird nach dem 5ten Fall ein Ort gefunden werden, wenn $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; nach dem 6ten

Fall aber könnte unter diesen Bedingungen kein Ort gefunden werden, weil bey dem 6ten Fall nothwendig $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$ seyn muß. Wenn wieder $NM : MH > NH\alpha : HS \times N\gamma$, aber $NH\alpha \overline{\gtrless} HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so kann weder nach dem 5ten noch nach dem 6ten Fall ein Ort gefunden werden, der Ort ist also unmöglich. Ist $NM : MH < NH\alpha : HS \times N\gamma$, so findet man einen Ort nach dem 6ten Fall, und, wenn überdiß $NH\alpha < HR \times M\beta + HS \times N\gamma$, so findet man noch einen andern nach dem 5ten Fall. Ist $NM : MH = NH\alpha : HS \times N\gamma$, und zugleich $NH\alpha = HR \times M\beta + HS \times N\gamma$; so wird jeder Punkt ausserhalb der Parallelen den Foderungen ein Genüge thun.

Finden aber die Bestimmungen des 5ten und 6ten Falls Statt, wenn der Punkt A auf der Seite von DE liegt, auf welcher BC ist, so werden sie auch Statt finden, wenn er auf der andern Seite von DE ist. Wenn also für den 5ten und 6ten Fall unter der ersten Voraussezung, d. i. wenn der Punkt A mit BC auf einerley Seite von DE liegt, ein Ort verzeichnet werden kann; so kann in eben den Fällen auch einer verzeichnet werden, wenn der Punkt A auf der andern Seite von DE liegt.

Auf ähnliche Art nun wird man zu verfahren haben, wenn 4. oder mehrere Parallelen der Lage nach gegeben sind, und die Summe der Rechteke, die zwischen einigen der aus einem Punkt an die Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogenen Linien, und eben so viel gegebenen Linien enthalten sind, gleich ist der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen gezogenen und eben so viel gegebenen Linien enthalten sind.

Berechnung.

Fig. 35. a.

1. Fall. Hier ist nach der Komposition

$$AH \times H\varepsilon = HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon,$$

und $\alpha\delta = \dfrac{HR.\ M\beta}{NH} = \dfrac{\text{fin. AHB. } M\beta}{\text{fin. AKD}} = \dfrac{\text{fin. ALF. fin. AHB. } M\beta}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$

$$\delta\varepsilon = \frac{HS.\ N\gamma}{NH} = \frac{\text{fin. AHB. } N\gamma}{\text{fin. ALF}} = \frac{\text{fin. AKD. fin. AHB. } N\gamma}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$$

$$H\varepsilon = H\alpha - (\alpha\delta + \delta\varepsilon)$$

$$= \frac{NH \times H\alpha - (HR \times M\beta + HS \times N\gamma)}{NH}$$

$$= \frac{\text{fin. ALF. fin. AKD. } H\alpha - \text{fin. AHB (fin. ALF. } M\beta + \text{fin. AKD. } N\gamma)}{\text{fin. ALF. fin. AKD}}$$

Mithin ist $AH = \dfrac{HM \times \alpha\delta + HN \times \delta\varepsilon}{H\varepsilon}$

$$= \frac{HM \times HR \times M\beta + HN \times HS \times N\gamma}{NH \times H\alpha - (HR \times M\beta + HS \times N\gamma)}$$

$$= \frac{\text{fin. AHB (HM. } M\beta\text{. fin. ALF} + \text{HN. } N\gamma\text{. fin. AKD)}}{H\alpha\text{. fin. ALF. fin. AKD} - \text{fin. AHB (} M\beta\text{. fin. ALF} + N\gamma\text{. fin. AKD)}}$$

Sind

Sind die Linien HM, HN nicht unmittelbar, sondern statt derselben die aus einem Punkt H der Linie BC auf die Parallelen DE, FG gefällten Perpendikel bekannt, und ist das auf DE gefällte Perpendikel = B, das auf FG gefällte Perpendikel = C; so wird, weil $HM = \frac{B}{\sin. AHB}$, und $HN = \frac{C}{\sin. AHB}$, die lezte Formel jezt diese:

$$AH = \frac{B.\ M\beta.\ \sin.\ ALF + C.\ N\gamma.\ \sin.\ AKD}{H\alpha.\ \sin.\ ALF.\ \sin.\ AKD - \sin.\ AHB\ (M\beta.\ \sin.\ ALF + N\gamma.\ \sin.\ AKD)}$$

Auch aus der Berechnung für diesen ersten Fall erhellet, was schon in der Bestimmung gesagt worden, daß nemlich $NH \times H\alpha > HR \times M\beta + HS \times N\gamma$ seyn muß. Für die übrigen Fälle wird die Rechnung ganz auf ähnliche Art geführt. Bey der wirklichen Anwendung wird es übrigens wohl bequemer seyn, die Linien $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, $H\varepsilon$ einzeln zu berechnen, und daraus AH nach der ersten Formel herzuleiten, als diese Linie unmittelbar aus den ursprünglich gegebenen Stüken nach der lezten Formel zu berechnen.

2. Lehnsaz.

Wenn irgend eine Anzahl von Grössen so beschaffen ist, daß immer zwey und zwey einerley Verhältniß unter einander haben, und die Summe der Rechteke, die zwischen einigen der Vorderglieder und eben so viel geraden Linien enthalten sind, gleich ist der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen Vordergliedern, und eben so viel geraden Linien enthalten sind; so wird auch die Summe der Rechteke, die zwischen den zu jenen erstern Vordergliedern gehörigen Hintergliedern und den ersten gleichvielen geraden Linien enthalten sind, gleich seyn der Summe der Rechteke, die zwischen den zu den zweyten Vordergliedern gehörigen Hintergliedern und den zweyten gleichvielen geraden Linien enthalten sind.

Es seye $A : B = C : D = E : F$ u. s. w., und $A \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon$; so wird auch $B \times \alpha = D \times \gamma + F \times \varepsilon$ seyn.

Denn nach 1, 6. ist $A \times \alpha : B \times \alpha = C \times \gamma : D \times \gamma = E \times \varepsilon : F \times \varepsilon$. Folglich nach 12, 5. $A \times \alpha : B \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon : D \times \gamma + F \times \varepsilon$. Nun ist $A \times \alpha = C \times \gamma + E \times \varepsilon$, folglich auch $B \times \alpha = D \times \gamma + F \times \varepsilon$. Und auf ähnliche Art wird man bey mehreren Grössen schliessen.

27. Saz.

Wenn drey gerade Linien, die sich alle in einerley Punkt schneiden, der Lage nach gegeben sind, und das übrige bleibt wie im vorhergehenden Saz.

Fig. 36.

Es seyen die 3. geraden Linien BC, BE, BG der Lage nach gegeben, und an dieselbe aus einem Punkt A 3. gerade Linien AH, AK, AL unter gegebenen Winkeln

keln gezogen, und es seye AH die Linie, die mit einer gegebenen geraden Linie α das Rechtek enthält, das der Summe der beyden übrigen Rechteks gleich ist, die zwischen den andern aus A gezogenen Linien, und zwischen den gegebenen geraden Linien β und γ enthalten sind. Die verlängerte Linie AH, die an BC gezogen ist, begegne den übrigen der Lage nach gegebenen Linien in den Punkten M, N, und wenn H ausserhalb dieser Punkte liegt, so seye M der Punkt, der zunächst bey H liegt, BE die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, folglich BG die gerade Linie, auf welcher der andere Punkt N liegt. Ist aber der Punkt H zwischen M und N, so seye der Punkt M der, welcher entweder zwischen den Punkten A, H, oder auf der verlängerten Linie HA nach A hin liegt, und BC seye die gerade Linie, auf welcher der Punkt M liegt, BG also die gerade Linie, auf welcher der Punkt N liegt. Es seye ferner β diejenige gegebene gerade Linie, welche eine Seite ist von dem Rechtek, dessen andere Seite die gerade Linie ist, die an diejenige von den der Lage nach gegebenen Linien aus dem Punkt A gezogen ist, auf welcher der Punkt M liegt, und γ seye die Seite des andern Rechteks. Wenn man nun dieses gehörig bemerkt; so wird man die Fälle des gegenwärtigen Sazes eben so unterscheiden können, wie die Fälle des vorhergehenden Sazes, nemlich vermittelst der Punkte A, H, M, N. Es wird nemlich in den 4 ersten Fällen der Punkt H auf der verlängerten Linie NM liegen, und der 1ste Fall wird seyn, wenn der Punkt A ausserhalb der übrigen Punkte H, M, N auf der Seite von H liegt; der 2te, wenn der Punkt A zwischen H und M; der 3te, wenn A zwischen M und N; der 4te, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte auf der Seite von N liegt. In den beyden lezten Fällen liegt der Punkt H zwischen N und M, und der 5te Fall wird seyn, wenn A ausserhalb der übrigen Punkte liegt,

auf

auf welcher Seite es seyn mag. Endlich wird der 6te Fall seyn, wenn der Punkt A zwischen den übrigen Punkten, also entweder zwischen M und H, oder zwischen N und H liegt. Weil aber die Auflösungen und Bestimmungen aller dieser Fälle nur wenig von denen unterschieden sind, die wir bey dem vorigen Saz gebraucht haben; so wird es genug seyn, nur den 1sten Fall weiter auszuführen.

1. Fall. Wenn der Punkt A ausserhalb der übrigen Punkte auf der Seite des Punktes H liegt, wo nemlich die Ordnung der Punkte, wie gesagt worden, diese ist: A, H, M, N.

Weil das Dreyek AKM der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von AM zu AK gegeben. In diesem Verhältniß seye β zu δ, weil nun β gegeben ist; so ist auch die gerade Linie δ gegeben, und es ist $AM \times \delta = AK \times \beta$. Eben so, weil das Verhältniß von AN zu AL gegeben ist; so ist, wenn man γ zu ε in eben diesem Verhältniß nimmt, ε gegeben, und $AN \times \varepsilon = AL \times \gamma$. Es ist aber nach der Voraussezung $AH\alpha = AK \times \beta + AL \times \gamma$; also ist auch $AH\alpha = (AM \times \delta + AN \times \varepsilon$, d. i. (1, 2. E. =) $AH \times \delta + HM \times \delta + AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$, und, das gemeinschaftliche Rechtek $AH \times (\delta + \varepsilon)$ abgezogen, ist $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)] = HM \times \delta + HN \times \varepsilon$. Weil aber das Verhältniß von MH zu HB und von HB zu HN gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von MH zu HN gegeben. Nun sind die Linien δ, ε, folglich auch ihr Verhältniß gegeben; also ist (23, 6.) das Verhältniß von $HM \times \delta$ zu $HN \times \varepsilon$ gegeben, folglich (7. D.) das Verhältniß der Summe von $HM \times \delta$ und $HN \times \varepsilon$ zu $HM \times \delta$, mithin das Verhältniß von $AH \times [\alpha - (\delta + \varepsilon)]$ zu $HM \times \delta$ gegeben. Es sind aber die geraden Linien α, δ, ε gegeben, also ist (65. D.) das Verhältniß von AH zu MH gegeben. Nun ist das Verhältniß von MH zu HB, folglich auch das

Verhältniß von AH zu HB gegeben; und, weil überdiß der Winkel AHB gegeben ist, so wird, wenn AB gezogen ist, das Dreyek ABH der Gattung nach gegeben seyn (44. D.). Es ist also der Winkel ABH gegeben, und weil BH der Lage nach, und überdiß auch der Punkt B gegeben ist; so ist (32. D.) AB der Lage nach gegeben. Der Punkt A berührt also eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Auf der geraden Linie BC nehme man irgend einen Punkt H, und ziehe an BG eine Linie NH, die mit BH einen Winkel mache, gleich dem gegebenen Winkel, den die aus A an BC zu ziehende Linie mit BC einschliessen soll, und HN begegne der Linie BE in M. Ferner ziehe man aus H an BE eine gerade Linie, unter einem Winkel gleich dem gegebenen Winkel, unter dem aus A an BE eine Linie soll gezogen werden. Dieser durch H an BE gezogenen Linie begegne eine durch N mit BE gleichlauffend gezogene Linie in dem Punkt R. Endlich ziehe man HS an BG unter dem dritten gegebenen Winkel. Es seyen ferner α, β, γ die gegebenen geraden Linien, welche Seiten seyn sollen von den Rechtefen, von denen die aus A an BC, BE, BG zu ziehenden Linien die andern Seiten sind. Man nehme weiter $NH : HR = \beta : \delta$ und $NH : HS = \gamma : \varepsilon$. Weil nun bewiesen worden, daß $AH \times \alpha = AH \times \delta + HM \times \delta + AH \times \varepsilon + HN \times \varepsilon$; so ist $AH \times \alpha > AH \times \delta + AH \times \varepsilon$, also muß $\alpha > \delta + \varepsilon$, folglich $NH \times \alpha > (NH \times \delta + NH \times \varepsilon$, d. i. wegen der angeführten Verhältnisse $>) HR \times \beta + HS \times \gamma$ seyn, und diß ist die Bestimmung für diesen Fall. Es seye also $NH \times \alpha > HR \times \beta + HS \times \gamma$; so wird rükwärts geschlossen werden, daß $\alpha > \delta + \varepsilon$. Der Ueberschuß von α über die Summe

Summe von δ und ε seyn ζ, d. i. es seye $\alpha = \delta + \varepsilon + \zeta$, und man mache ein Rechtek $O \times P = HM \times \delta + HN \times \varepsilon$ (45, 1. E.), und bestimme eine Linie Q so, daß $\zeta : O = P : Q$, verlängere dann NH auf der Seite von H bis an einen Punkt A, so daß $HA = Q$, und ziehe BA; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt a auf derselben an BC, BE, BG die Linien ah, ak, al mit HN, HR, HS gleichlauffend zieht; so ist $ah \times \alpha = ak \times \beta + al \times \gamma$. Denn, weil nach der Verzeichnung $AH \times \zeta = (O \times P$, d. i. $=)$ $HM \times \delta + HN \times \varepsilon$; so ist, auf beyden Seiten das Rechtek $AH \times (\delta + \varepsilon)$ hinzu gesezt, das Rechtek $AH \times (\delta + \varepsilon + \zeta)$, d. i. das Rechtek $AH \times \alpha = AM \times \delta + AN \times \varepsilon$. Wegen der gleichwinklichten Dreyeke aber ist $AM : AK = (HN : HR$, d. i. nach der Verzeichnung $=)$ $\beta : \delta$; also $AM \times \delta = AK \times \beta$. Auf ähnliche Art ist $AN : AL = (HN : HS$, d. i. $=)$ $\gamma : \varepsilon$; also $AN \times \varepsilon = AL \times \gamma$. Folglich ist $AH \times \alpha = AK \times \beta + AL \times \gamma$. Und weil $AH : ah = (BA : Ba$, d. i. $=)$ $AK : ak = AL : al$; so ist nach dem 2ten Lehnsaz $ah \times \alpha = ak \times \beta + al \times \gamma$.

Die übrigen 5. Fälle, wie auch diejenigen, wo eine oder mehrere der gezogenen Linien mit eben so vielen der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen, werden auf ähnliche Art ausgeführt werden können.

Berechnung.

Fig. 36.

1. Fall. Es ist $\alpha \times AH = \beta \times AK + \gamma \times AL$.

Aber $AH = \frac{AB.\ \text{sin.}\ ABC}{\text{sin.}\ H}$

$AK = \frac{AB.\ \text{sin.}\ (ABC + CBE)}{\text{sin.}\ K}$

$= \frac{AB\ (\text{sin.}\ ABC.\ \text{cosin.}\ CBE + \text{sin.}\ CBE\ \text{cosin.}\ ABC)}{\text{sin.}\ K}$

$AL = \frac{AB.\ \text{sin.}\ (ABC + CBG)}{\text{sin.}\ L}$

$= \frac{AB\ (\text{sin.}\ ABC.\ \text{cosin.}\ CBG + \text{sin.}\ CBG.\ \text{cosin.}\ ABC)}{\text{sin.}\ L}$

Mithin

Mithin wird $\frac{\alpha.\ \sin.\ ABC}{\sin.\ H} = \sin.\ ABC\left(\frac{\beta.\ \cos.\ CBE}{\sin.\ K} + \frac{\gamma.\ \cos.\ CBG}{\sin.\ L}\right)$

$$+ \cos.\ ABC\left(\frac{\beta.\ \sin.\ CBE}{\sin.\ K} + \frac{\gamma.\ \sin.\ CBG}{\sin.\ L}\right)$$

oder $\text{tang.}\ ABC = \dfrac{\dfrac{\beta.\ \sin.\ CBE}{\sin.\ K} + \dfrac{\gamma.\ \sin.\ CBG}{\sin.\ L}}{\dfrac{\alpha}{\sin.\ H} - \dfrac{\beta.\ \cos.\ CBE}{\sin.\ K} - \dfrac{\gamma.\ \cos.\ CBG}{\sin.\ L}}$

Ganz ähnlich ist die Berechnung für die übrigen Fälle.

3. Lehnsaz.

Fig. 37.

Wenn man in einem Dreyek BCD aus einem Winkelpunkt B eine Linie BG mit der gegen über stehenden Seite CD gleichlauffend, und aus einem Punkt A auf der Linie BG an die beyden andern Seiten des Dreyeks BC, BD oder an ihre Verlängerungen zwey gerade Linien AE, AF zieht; so werden diese Linien AE, AF eben das Verhältniß unter einander haben, welches die Linien DQ, CR haben, die an eben diese Seiten des Dreyeks aus den ihnen entgegengesezten Winkeln mit AE, AF gleichlauffend gezogen werden. Und eben diß wird Statt finden, wenn man anstatt der Linien BC, BG die Linien MK, MH nimmt, die aus irgend einem Punkt M auf der Linie BD mit BC, BG gleichlauffend gezogen werden; nemlich, wenn man an MK, BD die Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend zieht; so wird HK: HL = DQ: CR seyn.

Denn, wegen der gleichwinklichten Dreyeke AEB, DQC ist AE: AB = DQ: DC, wegen der gleichwinklichten Dreyeke ABF, CDR aber ist AB: AF = DC: CR; folglich gleichförmig (ex aequo) AE: AF = DQ: CR, und völlig auf die nemliche Art wird bewiesen, daß HK: HL = DQ: CR.

4. Lehnsaz.

Fig. 38.

Wenn, wie im vorigen Lehnsaz, wieder BG mit der gegen über stehenden Seite des Dreyeks DC gleichlauffend, und CB nach E hin verlängert ist; und man zieht aus einem Punkt H innerhalb des Winkels GBD an CB, und BD die Linien HK, HL mit DQ, CR

gleich=

gleichlauffend; so ist HK : HL > DQ : CR. Ist hingegen, die übrigen Umstände gleich, der Punkt H innerhalb des Winkels GBE; so ist HK : HL < DQ : CR. Und umgekehrt, wenn aus einem Punkt H innerhalb des äussern Winkels eines Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem zwey gerade Linien HK, HL mit DQ, CR gleichlauffend gezogen werden, und HK : HL > DQ : CR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBD, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet die Linie BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von D. Ist aber HK : HL < DQ : CR; so liegt der Punkt H innerhalb des Winkels GBE, oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, also begegnet BH der verlängerten Seite CD auf der Seite von C. Ist endlich HK : HL = DQ : CR; so ist BH mit CD gleichlauffend.

Es seye erstens der Punkt H innerhalb des Winkels GBD oder innerhalb seines Scheitel-Winkels, und HK begegne der Linie BG in dem Punkt M, aus diesem ziehe man an BD die Linie MN mit HL gleichlauffend, und durch die Punkte K, N die Linie KN, die der Linie HL in O begegne. Es ist also HK : HL > HK : HO, d. i. > KM : MN, d. i. > DQ : CR.

Wenn der Punkt H innerhalb des Winkels GBE liegt; so wird man völlig auf ähnliche Art beweisen, daß HK : HL < DQ : CR.

Umgekehrt, wenn der Punkt H innerhalb des äussern Winkels des Dreyeks, oder innerhalb des Scheitel-Winkels von diesem liegt, und HK : HL > DQ : CR; so liegt H innerhalb des Winkels GBD. Denn es seye diß nicht, und der Punkt H liege, wenn es möglich ist, entweder 1. auf der Linie BG, oder 2. innerhalb des Winkels GBE, oder seines Scheitel-Winkels; so würde im ersten Fall nach dem vorhergehenden Lehnsaz HK : HL = DQ : CR, im 2ten Fall aber nach dem gegen-

gegenwärtigen Lehnsaz HK : HL < DQ : CR seyn. Es ist aber HK : HL > DQ : CR; also muß der Punkt H innerhalb des Winkels GBD liegen, folglich die Linie BH der gegen D hin verlängerten Seite CD begegnen. Auf ähnliche Art wird der umgekehrte Saz für die übrigen Fälle bewiesen.

28. Saz.

Wenn 3 gerade Linien der Lage nach gegeben sind, die weder alle unter einander gleichlauffend sind, noch sich alle in einem Punkt schneiden, und das übrige bleibt, wie beym 26sten Saz.

Fig. 39.

Aus einem Punkt A seyen an die 3. der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, BD, CD 3. gerade Linien AE, AF, AG unter den Winkeln AEB, AFD, AGC gezogen, welche gleich sind den gegebenen Winkeln Q, R, S, und es seye das Rechtek, das zwischen AE und einer gegebenen geraden Linie α enthalten ist, gleich der Summe der beyden Rechteke, wovon das eine zwischen AF und einer gegebenen geraden Linie β, das andere zwischen AG und einer gegebenen geraden Linie γ enthalten ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 39. a.

1. Fall. Wenn der Punkt A innerhalb des Dreyeks BCD liegt, das zwischen den der Lage nach gegebenen geraden Linien eingeschlossen ist.

Wenn der Ort der Punkte A, von was für einer Beschaffenheit er nun auch immer seyn mag, der geraden

den Linie CD in einem Punkt H begegnet, und man an BC, BD die geraden Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist offenbahr, daß HK×α = HL×β seyn wird; denn, weil der Punkt H auf der Linie CD selber liegt, so kann man aus ihm keine gerade Linie an CD ziehen. Und umgekehrt, wenn es auf der geraden Linie CD einen Punkt H giebt, so, daß HK×α = HL×β, oder, welches das nemliche ist, daß HK : HL = β : α; so ist klar, daß dieser Punkt H. auf dem gesuchten Ort liegen werde. Man wird aber immer einen Punkt H von dieser Beschaffenheit auf der Linie CD finden können; denn, eine gerade Linie, die innerhalb des Winkels CBD liegt, und ein Ort ist von der Beschaffenheit, daß zwey aus irgend einem Punkt desselben an BC, BD unter den gegebenen Winkeln Q, R gezogene Linien das gegebene Verhältniß, wie β zu α unter einander haben, eine solche gerade Linie, sage ich, geht nach dem Zus. des 23sten Sazes immer durch den Punkt B, und muß also der gegen über stehenden Seite CD nothwendig begegnen. Es seye diß die gerade Linie BH, die der Linie CD in H begegne; so ist folglich der Punkt H gegeben, und, wenn man an BC, BD die Linien HK, HL mit AE, AF gleichlauffend zieht; so ist HK : HL = β : α, also HK×α = HL×β. Man ziehe die Linie AH, die der Seite BD in M begegne, durch die Punkte K und M ziehe man die Linie KM, die der Seite AE in N begegne, und an BC, CD ziehe man MO, MP mit AE, AG gleichlauffend. Es ist also wegen der Parallelen AN : AK = (AM : MH, d. i. =) AF : HL, folglich auch AN×α : HK×α = AF×β : HL×β. Nun ist bewiesen worden, daß HK×α = HL×β, folglich ist auch AN×α = AF×β. Nach der Voraussezung aber ist AE×α = AF×β + AG×γ, folglich bleibt, AN×α oder AF×β hinweg genommen, NE×α = AG×γ. Und wegen der Parallelen

ist

ist NE : MO = (NK : MK, d. i. = AH : MH, d. i. =) AG : MP. Also ist NE × α : MO × α = AG × γ : MP × γ. Nun ist bewiesen worden, daß NE × α = AG × γ; folglich ist auch MO × α = MP × γ, d. i. MO : MP = γ : α, d. i. in einem gegebenen Verhältniß. Weil also aus einem Punkt M an 2. der Lage nach gegebene gerade Linien BC, CD, die einander in einem Punkt C begegnen, 2. Linien MO, MP, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen worden; so berührt der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 23sten Saz; nun berührt aber der Punkt M auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BD, folglich ist er gegeben; es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; mithin ist die gerade Linie HM der Lage nach gegeben; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man finde nach dem 23sten Saz die gerade Linie BH innerhalb des Winkels CBD, so, daß sie ein Ort sey von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt H auf derselben an die Linien BC, BD zwey gerade Linien HK, HL unter den Winkeln Q, R zieht, HK : HL = β : α, d. i. daß HK × α = HL × β seye. Die Linie BH begegne der Seite CD in H. Eben so finde man innerhalb des Winkels BCD die gerade Linie CM, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt M auf derselben an BC, CD zwey gerade Linien MO, MP unter den Winkeln Q, S zieht, MO × α = MP × γ seye. Die Linie CM begegne der Seite BD in M, und durch die Punkte M, und H ziehe man die Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Win-

kels

kels BDC an BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ seyn. Denn man ziehe die Linie MK, die der Linie AE in N begegne; so ist wegen der Parallelen und nach 1, 6. E. $AN \times \alpha : HK \times \alpha = AF \times \beta : HL \times \beta$. Nach der Verzeichnung aber ist $HK \times \alpha = HL \times \beta$, mithin ist auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Eben so ist wegen der Parallelen, und nach 1, 6. E. $NE \times \alpha : MO \times \alpha = AG \times \gamma : MP \times \gamma$, nach der Verzeichnung aber ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, folglich ist auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma$. Nun ist gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta$ seye, folglich ist, auf beyden Seiten gleiche Rechteke hinzu gefügt, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

Fig. 39. b.

Werden aber aus irgend einem Punkt A auf demjenigen Stük der verlängerten geraden Linie HM, das innerhalb des Nebenwinkels von BCD liegt, an die Linien BC, BD, CD die gerade Linien AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln gezogen; so ist in diesem Fall AE der Ueberschuß von AN über NE, folglich ist in diesem Fall $AE \times \alpha = AF \times \beta - AG \times \gamma$.

Fig. 39. c.

Werden endlich aus einem Punkt A auf irgend einem andern Stük der Linie HM die Linien AE, AF, AG gezogen, wie gesagt worden; so ist $AE \times \alpha = AG \times - AF \times \beta$, welches ganz wie bey der vorhergehenden Komposition bewiesen wird.

Uebrigens hat dieser Fall, in welchem nemlich die Punkte H, M auf den Seiten CD, BD des Dreyeks selbst liegen, keine Bestimmung.

Fig. 39. d.

2. Fall. Wenn die gerade Linie HM, welche der gesuchte Ort ist, einer der Seiten BD, DC des Dreyeks BCD, z. B. der Seite BD in M, und der andern über D hinaus verlängerten Seite CD in einem Punkt H auf der Verlängerung begegnet.

Dieser Fall (so wie die übrigen alle ausser dem lezten) werden auf eben die Art behandelt, wie der erste. Weil aber erfodert wird, daß der Punkt H auf der über D hinaus verlängerten Seite CD liegen soll; so wird, wenn man durch den Punkt B die Linie TBV mit CD gleichlauffend zieht, der Punkt H innerhalb des Winkels TBD liegen, und, wenn man HK, HL an BC, BD unter den gegebenen Winkeln, und DQ, CR mit HK, HL gleichlauffend an eben diese Linien zieht; so wird nach dem 4ten Lehnsaz HK: HK > DQ: CR seyn. Es ist aber HK: HL = $\beta:\alpha$, wie bey dem vorhergehenden Fall gezeigt worden, also ist $\beta:\alpha >$ DQ: CR; und diß ist die Bestimmung für diesen Fall.

Wenn also $\beta:\alpha >$ DQ: CR, und man innerhalb des Winkels XBD, welcher der Nebenwinkel von CBD ist, eine gerade Linie BH findet, so, daß die aus irgend einem Punkt derselben an BC und BD mit DQ, CR parallel gezogene Linien eben das Verhältniß unter einander haben, welches β zu α hat; so wird diese Linie BH der über D hinaus verlängerten Linie CD nothwendig begegnen, nach dem 4ten Lehnsaz. Es geschehe diß in H, und man finde die gerade Linie CM völlig, wie beym vorhergehenden Fall; so wird die durch die Punkte H, M gezogene Linie HM der gesuchte Ort seyn, welches ganz wie beym vorhergehenden Fall bewiesen wird. Und eben so findet man auch, was erfolgen werde, wenn man den Punkt A auf der Verlängerung von HM annimmt,

nimmt, nach welcher Seite auch diese Verlängerung geschehen mag.

Fig. 39. e.

3. Fall. Wenn die gerade Linie HM einer der Seiten, z. B. BD in M, der andern über C hinaus verlängerten Seite CD aber in einem Punkt H auf der Verlängerung begegnet. Dieser Fall ist von dem 2ten blos dadurch unterschieden, daß hier $\alpha : \beta < DQ : CR$ seyn muß nach dem 4ten Lehnsaz. Uebrigens ist die ganze nach beyden Seiten verlängerte Linie HM der gesuchte Ort, nur das zwischen den Punkten H, M gelegene Stük ausgenommen.

Fig. 39. f.

4. Fall. Wenn die gerade Linie HM beyden über D hinaus verlängerten Seiten BD, CD auf ihren Verlängerungen begegnet. Weil hier der Punkt H auf der über D hinaus verlängerten Linie CD liegen muß; so muß $\beta : \alpha > DQ : CR$ seyn, wie beym 2ten Fall gezeigt worden. Und, wenn man an CD die Linie BD mit MP oder AG gleichlauffend zieht; so wird auf ähnliche Art vermittelst des 4ten Lehnsazes gezeigt werden, daß $\gamma : \alpha > DQ : BS$ seyn müsse. Und, wenn sich diese beyden Bedingungen finden, und man BH wie in dem 2ten Fall, und eben so CM innerhalb des Nebenwinkels von BCD zieht; so werden die Punkte H, M auf den über D hinaus verlängerten Seiten CD, BD liegen, und die Linie HM wird der gesuchte Ort seyn.

Fig. 39. g.

5. Fall. Wenn die gerade Linie HM beyden über die Grundlinien BC hinaus verlängerten Seiten CD,

BD begegnet. Dieser Fall ist von dem 4ten blos darinn unterschieden, daß $\beta : \alpha < DQ : CR$, und auch $\gamma : \alpha < DQ : BS$ seyn muß. Und wenn man BH, CM innerhalb der Nebenwinkel von CBD, BCD zieht; so wird HM der gesuchte Ort seyn.

Fig. 39. h.

6. Fall. Wenn die Linie HM der einen über D hinaus verlängerten Seite CD, und der andern über die Grundlinie BC hinaus verlängerten Seite DB begegnet. Weil in diesem Fall der Punkt H innerhalb des Winkels liegt, der von der Linie DB, und einer durch B mit CD gleichlauffend gezogenen Linie eingeschlossen ist; so muß $\beta : \alpha > DQ : CR$ seyn. Und, weil der Punkt M innerhalb eines Winkels liegt, der von der Grundlinie BC, und einer durch C mit BD gleichlauffend gezogenen Linie eingeschlossen ist, so muß $\gamma : \alpha < DQ : BS$ seyn nach dem 4ten Lehnsaz. Unter diesen Bedingungen ziehe man BH, CM innerhalb der Nebenwinkel von CBD, BCD; so wird die ganze nach beyden Seiten verlängerte Linie HM der gesuchte Ort seyn, das Stük ausgenommen, welches zwischen den Punkten H, M eingeschlossen ist.

Fig. 39. i.

7. Fall. Wenn die gerade Linie HM, auf welcher nemlich der Ort ist, mit einer der Seiten BD, CD, z. B. mit CD gleichlauffend ist, es mag übrigens HM entweder der Seite BD selbst, oder ihrer nach irgend einer Seite geschehenen Verlängerung begegnen.

1. Es begegne HM der Linie BD selbst in dem Punkt M, und man ziehe AE, AF, AG unter den gegebenen Winkeln, wie im ersten Fall; so ist nach der

Vor-

Voraussezung $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$. Und, weil der Punkt M auf der Linie BD liegt; so wird, wenn man aus demselben an BC, CD die Linien MO, MP mit AE, AG gleichlauffend zieht, $MO \times \alpha = MP \times \gamma$ seyn, d. i. wenn man nach MN mit BC gleichlauffend zieht, und MN der Linie AE in N begegnet, es wird $NE \times \alpha = AG \times \gamma$ seyn; folglich ist der Rest $AN \times \alpha$ gleich dem Rest $AF \times \beta$, also $AN : AF = \beta : \alpha$. Und, wenn man DQ, CR mit AN, AF gleichlauffend zieht; so ist nach dem 3ten Lehnsaz $AN : AF = DQ, CR$, also $\beta : \alpha = DQ, CR$. Soll also HM mit CD gleichlauffend seyn; so muß diese Proportion Statt finden. Es seye diß, und man finde die Linie CM wie in dem ersten Fall, CM begegne der Linie BD in M, und man ziehe durch M eine mit CD gleichlauffende Linie HM; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben innerhalb des Nebenwinkels von BDC die Linien AE, AF, AG, von denen AE der Linie MN, die mit BC gleichlauffend ist, in N begegne; so ist nach dem 3ten Lehnsaz $AN : AF = DQ : CR$; d. i. nach der Voraussezung $= \beta : \alpha$. Also ist $AN \times \alpha = AF \times \beta$. Und nach der Verzeichnung (durch welche nemlich der Punkt M gefunden wurde) ist $MO \times \alpha = MP \times \gamma$, d. i. $NE \times \alpha = AG \times \gamma$, folglich nach Hinzusezung gleicher Rechteke $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$.

2. Soll aber HM der über D hinaus verlängerten Linie BD begegnen, so muß $\gamma : \alpha > DQ : BS$ seyn, wenn man nemlich BS mit MP gleichlauffend zieht. Soll hingegen HM der über B hinaus verlängerten Linie BD begegnen; so muß $\gamma : \alpha < DQ : BS$ seyn nach dem 4ten Lehnsaz. In diesen beyden Fällen aber muß überdiß $\beta : \alpha = DQ, CR$ seyn. Liegt der Punkt M auf der über D hinaus verlängerten Linie BD; so ist das Stük von HM, welches innerhalb des Scheitelwinkels von

BDC liegt, der gesuchte Ort. Liegt aber der Punkt M auf der über B hinaus verlängerten Linie BD; so ist das Stük von HM der gesuchte Ort, welches innerhalb des Winkels liegt, der von der Linie BC, und der über BC hinaus verlängerten Linie BD eingeschlossen ist. Das übrige bleibt ganz wie beym ersten Theil dieses 7ten Falls.

Die Fälle, in welchen von den 3. der Lage nach gegebenen geraden Linien 2. unter einander gleichlauffend sind, werden auf ähnliche Art behandelt, und man wird für jeden derselben einen Ort finden, wie in den vorhergehenden Fällen vermittelst des 23sten und bisweilen des 22sten Sazes.

Berechnung.

Fig. 39. a—h.

6 erste Fälle. Man findet nach dem 23sten Saz den Winkel DBH, und da in dem Dreyek BDH noch die Seite BD nebst dem Winkel BDH gegeben ist; so läßt sich folglich DH berechnen. Eben so findet man nach dem 23sten Saz den Winkel DCM, und vermittelst dieses Winkels, der Seite CD, und des Winkels CDM findet man DM. Folglich kann man in dem Dreyek DMH aus den Seiten DM, DH und dem gegebenen Winkel HDM auch die beyden übrigen Winkel bestimmen.

Fig. 39. i.

7. Fall. Man findet DM wie vorhin, und der Winkel HMD ist ohne weitere Rechnung bekannt. Auf ähnliche Art verfährt man, wenn von den 3. der Lage nach gegebenen Linien 2. unter einander gleichlauffen. Eine andere Rechnungsart giebt übrigens die bey dem

folgen-

folgenden Saz angeführte l' Huiliersche Behandlung an.

29. Saz.

Fig. 40. a.

Wenn 4 gerade Linien, BC, BD, CD, QB, die nicht alle unter einander gleichlauffen, (und nicht alle einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt haben) der Lage nach gegeben sind, und wenn aus einem Punkt A an dieselbige 4. gerade Linien, AE, AF, AG, AS unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und entweder das Rechtek, das zwischen einer der aus A gezogenen Linien AE, und einer gegebenen Linie α enthalten ist, gleich ist der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen aus A gezogenen Linien AF, AG, AS und eben so vielen gegebenen geraden Linien β, γ, δ enthalten sind, oder die Summe von zwey Rechteken, die zwischen zwey aus A gezogenen Linien AE, AF, und eben so vielen gegebenen geraden Linien α, β enthalten sind, gleich ist der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen beyden aus A gezogenen Linien AG, AS und eben so vielen gegebenen geraden Linien γ, δ enthalten sind: so berührt in beyden Fällen der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es seye

1. $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + AS \times \delta$. H seye der Punkt, in welchem der Ort der Punkte A der geraden Linie CD begegnet, und man ziehe an BC, BD, QR die gerade Linien HK, HL, HT mit AE, AF, AS gleichlauffend; so ist nach der Voraussezung, $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$. Also berührt nach dem vorhergehenden Saz der Punkt H eine der Lage nach gegebene gerade Linie; er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie CD; mithin ist der Punkt H

 gege-

gegeben. Man ziehe die Linie AH, und diese begegne der Linie BD in M, durch die Punkte M, K, T ziehe man die Linien MK, MT, diese begegnen den Linien AE, AS in den Punkten N, V, und an BC, CD, QR ziehe man die Linien MO, MP, MX mit AE, AG, AS gleichlauffend. Weil nun wegen der Parallelen HK : AN = HL : AF = HT : AV, und $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$, so ist nach dem 2ten Lehnsaz $AN \times \alpha = AF \times \beta + AV \times \delta$. Nach der Voraussezung aber ij. $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + AS \times \delta$; also ist, jene erste unter einander gleiche Rechteke von diesen leztern gleichen Rechteken hinweg genommen, $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$.

Es ist aber, wie bey dem vorhergehenden Saz gezeigt worden, NE : MO = AG : MP, und, wegen der Parallelen ist AG : MP = (AH : MH = VT : MT =) VS : MX. Also ist NE : MO = AG : MP = VS : MX. Und, weil gezeigt worden, daß $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$; so ist nach dem 2ten Lehnsaz $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$.

Also berührt nach dem vorhergehenden Saz der Punkt M eine der Lage nach gegebene gerade Linie, er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie BD; mithin ist der Punkt M gegeben; nun ist gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; folglich berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie HM.

Komposition.

Man finde vermittelst des vorhergehenden Sazes eine gerade Linie, die ein Ort seye von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt desselben an die Linien BC, BD, QR 3 gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, das Rechtek, das zwischen der an

BC

BC gezogenen Linie, und der gegebenen geraden Linie α enthalten ist, gleich seye der Summe der Rechteke, von welchen das eine zwischen der an BD gezogenen Linie, und der gegebenen geraden Linie β, das andere zwischen der an QR gezogenen Linie und der gegebenen geraden Linie δ enthalten ist. Die gefundene gerade Linie begegne der Linie CD in dem Punkt H, und man ziehe an BC, BD, QR die Linien HK, HL, HT unter den gegebenen Winkeln; so ist folglich $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$. Auf ähnliche Art finde man auf der geraden Linie BD den Punkt M, so, daß, an BC, CD, QR die Linien MO, MP, MX unter den gegebenen Winkeln gezogen, $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$ seye. Durch die Punkte H, und M ziehe man die gerade Linie HM, so wird diese der gesuchte Ort seyn; d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf derselben an BC, BD, CD, QR 4 gerade Linien AE, AF, AG, AS unter den gegebenen Winkeln zieht; so wird $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + HS \times \delta$ seyn. Denn, man ziehe die Linien MK, MT, diese begegnen den Linien AE, AS in den Punkten N, V; und, weil $HK : AN = HL : AF = HT : AV$, und, nach der Verzeichnung, $HK \times \alpha = HL \times \beta + HT \times \delta$; so ist, nach dem 2ten Lehnsaz, $AN \times \alpha = AF \times \beta + AV \times \delta$. Eben so, weil $NE : MO = AG : MP = VS : MX$, wie vorhin gezeigt worden, und nach der Verzeichnung $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$; so ist, nach dem 2ten Lehnsaz, $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$. Und, weil gezeigt worden, daß auch $AN \times \alpha = AF \times \beta + AV \times \delta$ seye; so ist, die gleiche Rechteke zusammen genommen, $AE \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma + AS \times \delta$.

Es seye

2. $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$, und im übrigen bleibe alles, wie vorhin. H seye wieder der Punkt, in welchem der Ort der geraden Linie CD begegnet,

gegnet, und man ziehe HK, HL, HT wie vorhin; so ist nach der Voraussezung $HK \times \alpha + HL \times \beta = HT \times \delta$; also berührt der Punkt H nach dem 28sten Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie; er berührt aber auch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie CD; folglich ist der Punkt H gegeben. Man ziehe die nemlichen Linien wie im ersten Fall; so ist $HK : AN = HL : AF = HT : AV$, und weil $HK \times \alpha + HL \times \beta = HT \times \delta$; so sind nach dem 2ten Lehnsaz auch $AN \times \alpha + AF \times \beta = AV \times \delta$. Nach der Voraussezung aber sind $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$; folglich ist, jene erstere gleiche Rechteke von diesen leztern hinweg genommen, $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$. Und, weil wie beym vorhergehenden Fall gezeigt worden, $NE : MO = AG : MP = VS : MX$; so ist nach dem 2ten Lehnsaz $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$. Folglich ist der Punkt M gegeben, es ist aber gezeigt worden, daß auch der Punkt H gegeben seye; also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man finde nach dem 28sten Saz den Punkt H auf der geraden Linie CD, so, daß $HK \times \alpha + HL \times \beta = HT \times \delta$ seye. Eben so finde man auf der geraden Linie BD den Punkt M, so, daß $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$ seye. Durch die Punkte H, M ziehe man die gerade Linie HM; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A dieser Linie AE, AF, AG, AS zieht, wie gesagt worden; so werden $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$ seyn. Denn, man verzeichne alles, wie beym vorhergehenden Fall; so ist $HK : AN = HL : AF = HT : AV$, und nach der Verzeichnung ist $HK \times \alpha + HL \times \beta = HT \times \delta$; folglich ist auch nach dem 2ten Lehnsaz $AN \times \alpha + AF \times \beta = AV \times \delta$.

$= AV \times \delta$. Eben so ist $NE : MO = AG : MP = VS : MX$, und $MO \times \alpha = MP \times \gamma + MX \times \delta$; folglich, nach dem 2ten Lehnsaz auch $NE \times \alpha = AG \times \gamma + VS \times \delta$. Mithin, die gleichen Rechteke zusammen genommen, $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \gamma + AS \times \delta$.

Fig. 40. b.

1. Zus. Auch, wenn die Rechteke, die zwischen einer der gezogenen Linien, oder zwischen einigen der gezogenen Linien, und zwischen gegebenen geraden Linien enthalten sind, nicht gleich sind der Summe der Rechteke, die zwischen den übrigen gezogenen Linien, und eben so viel gegebenen geraden Linien enthalten sind; sondern, wenn sie auch nur zu dieser Summe ein gegebenes Verhältniß haben; so berührt auch noch bey dieser Voraussezung der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Z. B. bey dem Fall von 4 geraden Linien. Es habe $AE \times \alpha + AF \times \beta$ zu $AG \times \gamma + AS \times \delta$ ein gegebenes Verhältniß. In eben diesem Verhältniß seye ε zu γ und ζ zu δ; so wird auch $AG \times \varepsilon$ zu $AG \times \gamma$, und $AS \times \zeta$ zu $AS \times \delta$ in eben diesem Verhältniß seyn. Folglich ist nach 12, 5. E. auch $AG \times \varepsilon + AS \times \zeta$ in eben diesem Verhältniß zu $AG \times \gamma + AS \times \delta$. Also sind $AE \times \alpha + AF \times \beta = AG \times \varepsilon + AS \times \zeta$. Mithin berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Komposition erhellet von selbst.

Fig. 40. c.

2. Zus. Auch, wenn die Summe aller Rechteke gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Man ziehe aus dem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linien

Linien BC, BD, CD u. s. w. die gerade Linien AE, AF, AG u. s. w. unter den gegebenen Winkeln, und es seye die Summe aller Rechteke $AE \times \alpha$, $AF \times \beta$, $AG \times \gamma$ u. s. w. gleich einem gegebenen Raum; dieser Raum seye gleich dem Rchtk $EH \times \alpha$, wo nemlich EA bis an den Punkt H hin verlängert werden muß; weil nun $EH \times \alpha$ der Grösse nach, und überdiß auch α gegeben ist; so ist EH der Grösse nach gegeben; nun ist BC der Lage nach, und überdiß auch der Winkel HEB gegeben; also berührt der Punkt H eine gerade mit BC gleichlauffende Linie (20. Saz.). Es seye diß die Linie HK; und, weil nach der Voraussezung die Summe der Rchtke $AE \times \alpha$, $AF \times \beta$, $AG \times \gamma$ u. s. w. gleich ist dem Rchtk $EH \times \alpha$; so ist, das gemeinschaftliche Rchtk $AE \times \alpha$ hinweg genommen, die Summe der Rchtke $AF \times \beta$, $AG \times \gamma$ u. s. w. gleich dem Rchtk $AH \times \alpha$. Also berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt auf der geraden Linie BC ziehe man eine gerade mit AE gleichlauffende Linie, und nehme darauf BK so, daß $BK \times \alpha$ gleich werde dem gegebenen Raum, durch K ziehe man KL mit BC gleichlauffend. Ferner ziehe man nach gegenwärtigem Saz eine gerade Linie, die ein Ort seye von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus irgend einem Punkt desselben an die der Lage nach gegebene gerade Linien KL, BD, DC u. s. w. eben so viel andere gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, das Rchtk, das zwischen der an KL gezogenen geraden Linie, und der gegebenen geraden Linie α enthalten ist, gleich seye der Summe der Rchtke, die zwischen den übrigen aus diesem Punkt gezogenen Linien, und den übrigen gegebenen geraden Linien β, γ u. s. w.

ent-

enthalten sind; so wird die auf diese Art gezogene Linie der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A dieser Linie die Linien AH, AF, AG u. s. w. unter den gegebenen Winkeln; und, weil nach der Verzeichnung $AH \times \alpha = AF \times \beta + AG \times \gamma$ u. s. w. ist; so ist, das Rchtk $AE \times \alpha$ beyderseits hinzu gesezt, $AE \times \alpha + AF \times \beta + AG \times \gamma$ u. s. w. $= EH \times \alpha$, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Wenn α, β, γ, u. s. w. unter einander gleich sind; so ist die Summe von AE, AF, AG u. s. w. gleich einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie EH. Also verwandelt sich in diesem Fall gegenwärtiger Zusaz in folgenden Ort: Wenn aus einem Punkt A an gerade der Lage nach gegebene Linien BC, BD, CD u. s. w. eben so viel gerade Linien AE, AF, AG u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe aller dieser gezogenen Linien gleich ist einer gegebenen geraden Linie EH; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Eben so, wenn nur 3 oder 2 gerade Linien der Lage nach gegeben sind.

Fig. 40. d.

3. Zus. Auch, wenn die Summe einiger Rchtke um einen gegebenen Raum grösser ist, als die Summe der übrigen Rechtke; so berührt der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Es seyen die Rechteke $AE \times \alpha$ u. s. w. gleich der Summe der Rchtke $AF \times \beta$, $AG \times \gamma$ u. s. w. und eines gegebenen Raums; und man nehme auf der verlängerten Linie AF, FH so, daß $FH \times \beta$ gleich seye dem gegebenen Raum; so berührt der Punkt H eine der Lage nach gegebene gerade Linie, wie bey dem 2ten Zus. gezeigt worden. Und, weil nach der Voraussezung $AE \times \alpha$

u. s.

u. s. w. $=$ AF$\times\beta$ $+$ AG$\times\gamma$ u. s. w. $+$ FH$\times\beta$, d. i. $=$ AH$\times\beta$ $+$ AG$\times\gamma$ u. s. w. so berührt der Punkt A nach gegenwärtigem Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie; und die Komposition ist einerley mit der des vorigen Zus. Man muß nemlich hier nur zuerst KH finden.

Fig. 40. b.

4. Zus. Endlich, wenn der Ueberschuß der Summe einiger Rchtke über eine gegebene Grösse, oder die Summe einiger Rchtke und einer gegebenen Grösse zu der Summe der übrigen Rchtke ein gegebenes Verhältniß hat; oder, wenn die Summe von einigen dieser Rchtke, und einer Grösse, zu welcher die Summe der übrigen Rchtke ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; so berührt der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es habe der Ueberschuß der Summe der Rchtke AE$\times\alpha$ und AF$\times\beta$ über einen gegebenen Raum Z zu der Summe der Rchtke AG$\times\gamma$ und AS$\times\zeta$ ein gegebenes Verhältniß; und in eben diesem Verhältniß seye ε zu γ, und ζ zu δ; so wird, wie beym 1sten Zus. gezeigt werden, daß der Ueberschuß der Summe der Rchke AE$\times\alpha$ und AF$\times\beta$ über den Raum Q gleich seye der Summe der Rchtke AG$\times\varepsilon$ und AS$\times\zeta$. Folglich berührt der Punkt A nach dem 3ten Zus. eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Auf ähnliche Art wird der 2te und 3te Fall dieses Zusazes behandelt, nur daß man bey lezterem den 2ten Zus. braucht.

Wenn 5 gerade Linien der Lage nach gegeben sind; so wird ein Ort unter ähnlichen Voraussezungen, wie bey dem gegenwärtigen Saz und seinen Zusäzen völlig auf eben diese Art gefunden, und die Komposition wird vermittelst des Orts bey geraden Linien gemacht, es mag nun

nun entweder ein Rechtek gleich der Summe aller übrigen, oder die Summe von 2 Rechteken gleich der Summe der 3 übrigen seyn. Und auf ähnliche Art wird bey 6 geraden Linien der Ort vermittelst des Orts bey 5 Linien gefunden u. s. w. so viel auch gerade Linien der Lage nach gegeben seyn mögen.

Weil aber diese und ähnliche Säze sehr weitläufig werden, weil nemlich die Anzahl der der Lage nach gegebenen geraden Linien ohne Ende vermehrt werden kann; so ist es besser, zu zeigen, wie man von jeder beliebigen Anzahl von geraden Linien zu der nächst grössern Anzahl fortgehen könne, wie bey diesem und dem vorhergehenden Saz geschehen ist, nur, daß hier die Fälle, wenn entweder alle der Lage nach gegebene gerade Linien unter einander gleichlauffen, wie beym 26sten Saz, oder alle einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt haben, wie beym 27sten Saz, noch nicht mit genommen sind. In allen Fällen aber so wohl der gleichlauffenden, als nicht gleichlauffenden Linien wird folgender Saz gleich brauchbar seyn.

Fig. 40. e. f.

Aus einem Punkt A seyen an die der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, DE, FG u. s. w. die geraden Linien AH, AK, AL u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen, und es seye $AH \times \alpha = AK \times \beta + AL \times \gamma$ u. s. w.; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn man verlängere AK bis M, so, daß $KM \times \beta = AH \times \alpha$, d. i. $= AK \times \beta + AL \times \gamma$ u. s. w.; so ist, das gemeinschaftliche Rchtk $AK \times \beta$ hinweg genommen, $AM \times \beta = AL \times \gamma$ u. s. w. Und, weil $AH \times \alpha = KM \times \beta$; so ist $\alpha : \beta = KM : AH$; also ist das Verhältniß von KM zu AH gegeben. Es begegne AM der

der Linie BC in N, und, weil das Dreyek AHN der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von AH zu AN gegeben; folglich ist (9. D.) auch das Verhältniß von KM zu AN gegeben. Es seye KM : NA = OM : OA; so ist (19, 5. E. oder 12, 5. E.) KO : ON = KM : NA, also ist das Verhältniß von KO zu ON, mithin auch das Verhältniß von KN zu NO gegeben. Sind nun (Fig. 46. e.) BC, DE gleichlauffend; so ist, weil NK zwischen diesen Linien unter einem gegebenen Winkel gezogen worden, NK der Grösse nach gegeben (35. D.). Also ist die Linie NO, zu welcher NK ein gegebenes Verhältniß hat, ebenfalls der Grösse nach gegeben. Nun ist die Lage von BC und der Winkel BNO gegeben; also berührt der Punkt O eine der Lage nach gegebene, mit BC gleichlauffende Linie (20. Saz.). Sind aber (Fig. 46. f.) BC, DE nicht gleichlauffend; so werden sie einander in einem Punkt begegnen. Es geschehe diß in B; so ist das Dreyek NBK der Gattung nach gegeben, also das Verhältniß von KN zu NB gegeben; nun ist gezeigt worden, daß das Verhältniß von KN zu NO gegeben seye; also ist (9. D.) auch das Verhältniß von BN zu NO gegeben; nun ist die Lage von BN, der Punkt B, und der Winkel BNO gegeben; also berührt der Punkt O eine gerade der Lage nach gegebene Linie nach dem 1sten Fall des 23sten Sazes. Und, weil in beyden Fällen gezeigt worden, daß das Verhältniß von KM zu NA, d. i. das Verhältniß von OM zu OA gegeben seye; so ist also auch das Verhältniß von MA zu AO gegeben. Man nehme eine gerade Linie δ, die eben dieses Verhältniß zu der gegebenen geraden Linie β habe; so ist folglich die gerade Linie δ der Grösse nach gegeben, und es ist $AO \times \delta = MA \times \beta$, d. i. $= AL \times \gamma$ u. s. w. So viel gerade Linien also auch nach der Voraussezung des Sazes gegeben seyn mögen; so ist jezt der Ort auf eine Anzahl gerader Linien

zurük

zurük gebracht, die um Eins kleiner ist, als die Anzahl der im Anfang gegebenen geraden Linien, und, wenn man eine ähnliche Analyse, so oft als nöthig ist, wiederholt, so wird er auf den Fall zurük gebracht, in welchem nur 2 gerade Linien der Lage nach gegeben sind, also auf den 22sten oder 23sten Saz, je nachdem diese 2 gerade Linien gleichlauffen oder nicht. Weil nun der Ort für den Fall von 2 geraden Linien in dem 22sten und 23sten Saz aufgelöst ist; so wird er nach dem vorhergehenden Saz auch in dem Fall von 3 geraden Linien aufgelöst werden, und vermittelst der Auflösung in diesem Fall auch in dem Fall von 4 geraden Linien, und so weiter fort. Fermat hat für den Ort in dem besondern Fall von 3 geraden Linien, wenn die zwey von den gegebenen geraden Linien, welche wir β und γ nannten, gleich sind, einen ziemlich weitläuffigen Beweis, und er würde noch weitläuffiger werden, wenn man ihn auf den Fall, wo keine der 3 gegebenen geraden Linien mit der andern gleich ist, und noch mehr, wenn man ihn auf den Fall, wo mehr als 3 gerade Linien gegeben sind, ausdehnen wollte. Und die algebraische Rechnung, welche Schooten diesen Ort zu finden beybringt, kann vollends gar nicht bey der Auflösung irgend einer Aufgabe vermittelst dieses Orts gebraucht werden. *)

Berechnung.

Fig. 40. a.

Man könnte nach dem 28sten Saz die Punkte H, M finden, folglich in dem Dreyek DMH, in welchem die

*) Paul. Frisʃ. Oper. T. I. Probl. XLI. 1. 2. 3. Coroll. giebt auch kurz den algebraischen Kalkul für diese Aufgabe an. Anm. des Uebers.

die Seiten DM, DH nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind, das übrige bestimmen. Eben so könnte man den Fall, wenn 5 oder mehrere gerade Linien der Lage nach gegeben sind, auf eine um Eins geringere Anzahl gegebener Linien zurük bringen. Kürzer und allgemeiner aber findet man dieses alles nach dem sogleich zu erklärenden l' Huilierschen Verfahren.

Zugabe

zu den Säzen 22 bis 29

Von diesen Säzen, die, wie aus dem, was am Ende des 29sten Sazes gesagt worden ist, erhellet, nur besondere Fälle eines allgemeinen Sazes sind, hat kürzlich ein mit der Geometrie der Alten vorzüglich vertrauter Mathematiker, Herr l'Huilier aus Genf, eine neue eben so einfache als allgemeine Auflösung gegeben in dem Anhang zu seiner Polygonométrie, die zu Genf und Paris 1789 herausgekommen ist. Ich glaube mich verbunden, das Wesentliche seiner Methode hier anzuführen, und verweise übrigens wegen der ausführlichern Entwiklung besonders des Falls, wenn die der Lage nach gegebenen Linien keinen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, und der einzelnen schönen Bemerkungen auf die lesenswürdige Abhandlung selbst.

Herr l' Huilier braucht hiebey ein paar Lehnsäze, die ich hier auf meine Art vortragen will. Es seye also

Lehnsaz A.

Fig. 41.

Wenn 2 Punkte A und B gegeben sind; so läßt sich immer auf der Linie, welche diese Punkte verbindet, ein dritter Punkt finden, so, daß, wenn man aus diesen

sen 3 Punkten auf irgend eine Linie in der nemlichen Ebene Perpendikel fällt, das aus dem gefundenen Punkt gefällte Perpendikel doppelt genommen, gleich seye der Summe der Perpendikel, die aus den 2 gegebenen Punkten gefällt worden sind.

Analyse.

Fig. 41. a.

Der gesuchte Punkt seye C, man verlängere die Linie AB z. B. auf der Seite von A, und ziehe irgend eine gerade Linie XF, die der Verlängerung von AB in X begegne, und fälle auf XF die Perpendikel AD, CE, BF; so ist
XA : AD = XC : CE = XB : BF (4, 6. E.), folglich auch
XA : AD = AC : CE — AD (19, 5. E.) und eben so
XA : AD = XC : CE = CB : BF — CE (19, 5. E.)
folglich ist AC : CE — AD = CB : BF — CE (11, 5. E.)
Aber nach der Voraussezung ist 2 CE = AD + BF, oder CE — AD = BF — CE; folglich ist AC = CB (14, 5. E.).

Der Punkt C wird also gefunden, wenn man AB in 2 gleiche Theile theilt. Die Komposition erhellet von selbst.

1. Zus. Die Analyse paßt auf alle die Fälle, wo die willkührlich gezogene Linie DF der Verlängerung von AB begegnet. Ist die Linie DF mit AB gleichlauffend; so erhellet von selbst, daß der gefundene Punkt auch dann noch der Aufgabe eine Genüge leiste. Denn alsdann ist CE = AD = BF (34, 1. E.), folglich 2 CE = AD + BF.

2. Zusaz. Wenn die willkührlich gezogene Linie DF nicht der Verlängerung von AB, sondern der Linie AB selbst in dem Punkt A begegnet; so verschwindet das

aus A zu ziehende Perpendikel, und es wird CE = $\frac{1}{2}$ BF, oder 2 CE = BF.

Fig. 41. b.

3. Zusaz. Wenn die willkührlich gezogene Linie DF der Linie AB selbst zwischen A und B begegnet; z. B. zwischen A und C; so wird XA : AD = AC : CE + AD = CB : BF — CE. Wenn also hier auch AC = CB seyn soll, so muß die Voraussezung diese seyn, daß CE + AD = BF — CE (14, 5. E.), oder, daß 2 CE = BF — AD seye. Nemlich, weil die Perpendikel hier auf entgegengesezte Seiten der Linie DF gezogen werden; so muß eines in Bezug auf das andere als negativ betrachtet werden, es muß also, um auch diesen Fall unter unserm Lehnsaz mit begreiffen zu können, das Wort Summe in demselben in dem allgemeinern Sinn genommen werden, nach welchem es für den Fall, wenn einige der Grössen, von denen die Rede ist, in Bezug auf die andern negativ werden, ihren Unterschied anzeigt.

4. Zus. Ausser dem Punkt C kann kein anderer eben diese im Lehnsaz ausgedrukte Eigenschaft haben. Denn, wenn es möglich ist, so habe ein anderer Punkt G die nemliche Eigenschaft, und man ziehe GC, und ziehe auf der Verlängerung von GC durch irgend einen Punkt E eine Linie DEF senkrecht auf GC, und fälle auf dieselbe die Perpendikel AD, BF; so müßte folglich 2 GE = AD + BF seyn. Aber nach unserm Lehnsaz ist auch 2 CE = AD + BF; folglich müßte 2 GE = 2 CE, oder GE = CE seyn, welches unmöglich ist (9. Ax. 1. E.).

Lehn-

Lehnsaz B.

Fig. 42.

Wenn 2 Punkte A und B gegeben sind; so läßt sich immer auf der Linie, welche diese 2 Punkte verbindet, ein dritter Punkt finden, so, daß, wenn man aus diesen 3 Punkten auf irgend eine Linie in eben dieser Ebene Perpendikel fällt, die Summe des m fachen des aus dem einen gegebenen Punkt gefällten Perpendikels, und des n fachen des aus dem andern gegebenen Punkt gefällten Perpendikels gleich seye dem (m+n) fachen des aus dem gesuchten Punkt gefällten Perpendikels.

Analyse.

Der gesuchte Punkt seye C, und man verlängere die Linie AB z. B. auf der Seite von A, und ziehe irgend eine gerade Linie XF, die der Verlängerung von AB in X begegne, und fälle auf XF die Perpendikel AD, CE, BF; so ist
XA : AD = XC : CE = XB : BF (4, 6. E.), folglich auch
XA : AD = AC : CE — AD (19, 5. E.)
und noch XA : AD = m. AC : m (CE — AD) (15, 5. E.)
Eben so XA : AD = XC : CE = CB : BF — CE (19, 5. E.)
und noch XA : AD = n. CB : n (BF — CE) (15, 5. E.)
folglich ist m. AC : m (CE — AD) = n. CB : n (BF — CE) (11, 5. E.).
Aber nach der Voraussezung ist (m+n) CE = m. AD + n BF
oder m (CE — AD) = n (BF — CE),
folglich auch m. AC = n. CB (14, 5. E.), oder
AC : CB = n : m. Weil nun AB gegeben ist, so erhellet die Komposition aus 10, 6. E.

Zus. Man sieht leicht, daß hier wieder völlig die nemlichen Zusäze Statt finden, wie bey dem Lehnsaz A,

 der

der nur ein besonderer Fall von diesem hier ist. Nahmentlich muß auch hier Summe in der dort angezeigten ausgedehntern Bedeutung genommen werden. Und auch hier kann ausser dem Punkt C kein anderer die im Lehnsaz ausgedrukte Eigenschaft haben.

Lehnsaz C.

Fig. 43.

Wenn eine beliebige Anzahl n Punkte A, B, C, D .... N in einer Ebene gegeben ist; so läßt sich immer ein anderer Punkt Z in dieser Ebene finden, so, daß, wenn man auf irgend eine gerade Linie in dieser Ebene von den gegebenen Punkten sowohl als von dem Punkt Z Perpendikel fällt, das aus Z gefällte Perpendikel n mahl genommen gleich seye der Summe aller aus den gegebenen Punkten gefällten Perpendikel, Summe immer in der erklärten allgemeinern Bedeutung genommen.

1. besonderer Fall. Wenn nur 2 Punkte A, B gegeben sind. In diesem Fall ist der Lehnsaz einerley mit dem oben erwiesenen Lehnsaz A.

Fig. 43. a.

2. besonderer Fall. Wenn 3 Punkte A, B, C gegeben sind. Es läßt sich nach dem Lehnsaz A ein Punkt Y finden, so daß das von ihm auf irgend eine Linie der Ebene gefällte Perpendikel 2 mahl genommen gleich seye der Summe der aus A und B auf eben diese Linie gefällten Perpendikel. Man ziehe YC; so läßt sich auf dieser Linie nach dem Lehnsaz B ein Punkt Z finden, so, daß das von ihm auf irgend eine Linie der Ebene gefällte Perpendikel (2 + 1) mahl, d. h. 3mahl genommen gleich seye

seye der Summe des aus Y auf eben diese Linie gefällten Perpendikels 2 mahl genommen, und des aus C auf die nemliche Linie gefällten Perpendikels, d. h. der Summe der aus A, B, C auf diese Linie gefällten Perpendikel.

Fig. 43. b.

3. besonderer Fall. Wenn 4 Punkte A, B, C, D gegeben sind. Es läßt sich zwischen A und B ein Punkt X finden, dessen auf jede Linie der Ebene gefälltes Perpendikel 2 mahl genommen gleich seye der Summe der aus A und B darauf gefällten Perpendikel (Lehnsaz A.). Eben so findet man zwischen X und C nach dem Lehnsaz B einen Punkt Y, dessen Perpendikel 3 mahl genommen, gleich ist der Summe des doppelten Perpendikels von X und des einfachen von C, d. h. gleich der Summe aller aus A, B, C gefällten Perpendikel. Endlich findet man zwischen Y und D einen Punkt Z nach dem Lehnsaz B, dessen Perpendikel 4 mahl genommen gleich ist der Summe des dreyfachen Perpendikels von Y, und des einfachen von D, d. h. gleich der Summe aller aus A, B, C, D gefällten Perpendikel.

Im Allgemeinen sieht man, daß völlig eben so durch einmahlige Anwendung des Lehnsazes A, und (n—2) mahlige Anwendung des Lehnsazes B die in unserm Lehnsaz C vorgelegte Aufgabe aufgelößt wird.

1. Zus. Es läßt sich auch hier eben so, wie bey dem 4ten Zus. des Lehnsazes A erweisen, daß immer nur ein Punkt Z der Aufgabe Genüge leiste.

2. Zus. Man kann nun leicht auch den Punkt Z auf eine bequemere Art so bestimmen. In der Ebene, in welcher die gegebenen Punkte liegen, ziehe man irgend eine gerade Linie, und fälle auf sie aus allen gegebenen Punkten die Perpendikel AA′, BB′, CC′, DD′. . . .

 NN′;

NN'; so muß der Punkt Z so liegen, daß, wenn man aus ihm auf eben diese gerade Linie das Perpendikel ZZ' fällt, nun

$n. ZZ' = AA' + BB' + CC' + DD' \ldots + NN'$, oder daß

$$ZZ' = \frac{AA' + BB' + CC' + DD' \ldots + NN'}{n}$$ seye. Die

Linie ZZ' ist also der Grösse nach gegeben, und ihr einer Endpunkt Z' berührt die angenommene, folglich der Lage nach gegebene gerade Linie A' B' C'... N' unter einem gegebenen Winkel, mithin berührt auch ihr anderer Endpunkt Z eine der Lage nach gegebene mit A' B' C' gleichlauffende gerade Linie (20. Saz Ap.). Man ziehe durch irgend einen Punkt der Linie A' B' C' eine andere Linie darauf senkrecht, und fälle auf diese ebenfalls aus allen gegebenen Punkten die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd ... Nn; so wird eben so gezeigt, daß der Punkt Z auf einer mit der Linie a b c d ... n in einer Entfernung

$$= \frac{Aa + Bb + Cc + Dd \ldots + Nn}{n}$$ gleichlauf-

fenden geraden Linie liegen müsse. Er liegt also auf dem Durchschnitt-Punkt der beyden mit A' B' C' und a' b' c' gleichlauffenden Linien, und ist folglich gegeben.

3. Zus. Wollte man denken, von dem nach dem 2ten Zus. gefundenen Punkt Z seye es nur in Bezug auf die Linien A' B' C' und a' b' c' gewiß, daß er die in dem Lehnsaz erfoderte Eigenschaft habe, d. h. daß sein darauf gefälltes Perpendikel n mahl genommen gleich seye der Summe der aus den gegebenen Punkten darauf gefällten Perpendikel, man könne aber deswegen noch nicht wissen, ob er auch in Bezug auf jede andere Linie in dieser Ebene dieselbe Eigenschaft habe, so läßt sich dieser Zweifel leicht heben. Nach unserm Lehnsaz nemlich läßt sich immer auf die bey der dortigen Auflösung gezeigte Art ein Punkt P finden, der die verlangte Eigenschaft

genschaft in Bezug auf jede gerade Linie der Ebene hat. Dieser Punkt P also muß die angezeigte Eigenschaft auch für die Linien A′B′C′ und a′b′c′ haben, also nach dem 20sten Saz des Apoll. auf dem Durchschnitts-Punkt der vorhin mit A′B′C und a′b′c′ gezogenen Parallelen liegen, d. h. er muß mit dem nach dem 2ten Zus. gefundenen Punkt Z einerley seyn, der Punkt Z also muß, wie wenn er nach der Auflösung des Lehnsazes selbst gefunden wäre, die angezeigte Eigenschaft in Bezug auf alle Linien der Ebene haben.

4. Zus. Der Punkt, den wir in den bisherigen Lehnsäzen zu finden gelernt haben, heißt in der Mechanik Schwerpunkt der gegebenen Punkte, wenn nemlich diese alle als gleich schwer gedacht werden. Kürze halber wollen wir diesen Nahmen künftig auch brauchen, statt immer die Beschreibung der Eigenschaften dieses Punkts, wie sie in dem Lehnsaz C angegeben sind, zu wiederholen.

Diß vorausgesezt, wendet sich Herr l'Huilier zu den angeführten Säzen des Apollonius, die er aber noch allgemeiner macht, indem er, statt vorauszusezen, daß die Summe einiger Rechteke gleich sey der Summe der übrigen, voraussezt, daß die Summe aller Rechteke (Summe immer in dem allgemeinen Sinn genommen, in welchem diß Wort auch die Fälle begreift, wenn einige der Rechteke negativ genommen werden) gleich seye einem gegebenen Raum, wie in dem 2ten Zusaz des 29sten Sazes. Den Fall des 22sten, 24sten und 26sten Sazes, wenn alle der Lage nach gegebene gerade Linien gleichlauffen, läßt Herr l'Huilier weg, weil er sich leicht auf die einfache Ausgabe zurük bringen läßt: auf einer geraden Linie, auf welcher irgend eine Anzahl Punkte gegeben ist, einen Punkt zu finden, so daß die Summe der Rechteke, von denen jedes zwischen der Entfernung dieses Punkts von einem der gegebenen Punkte, und ei-

ner der Grösse nach gegebenen Linie enthalten ist, einem gegebenen Raum gleich seye. Weiters betrachtet er zunächst nur den besondern Fall, wenn die gerade Linien, welche an die der Lage nach gegebenen geraden Linien gezogen werden, senkrecht auf ihnen stehen; weil nemlich der Fall, wenn sie nicht senkrecht sind, sich sogleich auf diesen zurük bringen läßt, wenn man nur an die Stelle jeder der Grösse nach gegebenen Linie eine andere sezt, die sich zu der ersten verhält, wie der sinus totus zum sinus des Winkels, unter welchem die ihr zugehörige gerade Linie gezogen ist. Wenn nun alle der Lage nach gegebene gerade Linien einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt haben; so ist das Verfahren des Herrn l' Huilier folgendes. Er zeigt die Sache, um sie desto leichter zu machen, zuerst an dem besondern Fall, wenn 3 gerade Linien der Lage nach gegeben sind, welcher also mit Simsons 27sten Saz einerley ist.

Fig. 44.

Es seyen mithin 3 gerade Linien SA, SB, SC, die in einerley Ebene liegen, und einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt haben, der Lage nach gegeben; man solle den Ort der Punkte Y finden, die so beschaffen sind, daß, wenn man von jedem derselben die Perpendikel YA′, YB′, YC′ auf die der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC fällt, die Summe oder der Unterschied der Rechteke, den diese Perpendikel mit 3 der Grösse nach gegebenen Linien einschliessen, gleich seyen einem der Grösse nach gegebenen Raum Q.

Eintheilung. Man muß zuvörderst bestimmen, welche der auf die der Lage nach gegebenen Linien gefällten Perpendikel man als positiv betrachtet, so daß die auf die nemlichen Linien gefällten Perpendikel, welche eine

entge-

entgegengesezte Lage haben, als negativ betrachtet werden.

Es seye ASC > ASB, aber doch ASC < 2 rechte Winkel. Man verlängere die geraden Linien AS, BS, CS über S hinaus nach A″, B″, S″; so theilt sich die Ebene, in welcher die der Lage nach gegebenen geraden Linien liegen, in 6 Gegenden: C″SA, ASB, BSC, CSA″, A″SB″, B″SC″. Es scheint also zuerst, man müsse 6 verschiedene Lagen des Punkts Y untersuchen. Allein man bemerkt leicht, daß die Winkel C″SA, ASB, BSC ganz ähnliche Eigenschaften haben mit den Winkeln CSA″, A″SB, B″SC″, wenn man nur die Zeichen der Perpendikel, die von den in den ersten dieser Gegenden gelegenen Punkten gefällt werden, eben so ändert, wie sich die Richtung dieser Perpendikel ändert. Die 6 anfänglichen Fälle sind also auf 3 zurük gebracht. Ferner haben die aussen anliegenden Winkel C″SA, und BSC ähnliche Eigenschaften, wenn man nur die Zeichen der auf ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel gefällten Perpendikel ändert. Mithin sind alle Fälle nur auf die zwey zurük gebracht, ob der Punkt Y innerhalb des Winkels C″SA, oder innerhalb des Winkels ASB liegt.

Iste Lage des Punkts Y innerhalb des Winkels C″SA.

Unterabtheilung. Die aus dem Punkt Y gefällten Perpendikel werden entweder alle 3 als positiv, oder 2 als positiv, und 1 als negativ, oder 1 als positiv, und 2 als negativ, oder alle 3 als negativ betrachtet, welches 8 verschiedene Fälle zu geben scheint. Allein diese 8 Fälle lassen sich wieder auf 4 bringen. Denn alles, was man von 2 negativen und 1 positiven Perpendikel sagen würde, das würde auch von 2 positiven und 1 negativen Perpendikel gelten, die in dem Winkel CSA″, der Scheitelwinkel von C″SA ist, liegen würden. Von diesen lezten aber gilt alles, was man

von

von 2 positiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb des Winkels C″SA sagt, ebenfalls, nur daß man überall entgegengesezte Zeichen brauchen muß. Also gilt, was man von 2 positiven und 1 negativen Perpendikel innerhalb eines Winkels C″SA sagt, auch von 2 negativen und 1 positiven innerhalb des nemlichen Winkels, wenn man nur überall entgegen gesezte Zeichen braucht. Die 4 zu betrachtenden Fälle sind also diese:

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	—
+	—	+
—	+	+

1ster Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	+

Analyse. Auf den der Lage nach gegebenen geraden Linien nehme man SA, SB, SC den der Grösse nach gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig gleich. Man ziehe SY, und fälle darauf von den Punkten A, B, C die Perpendikel Aa, Bb, Cc; so sind von den Dreyeken $\begin{matrix} YSA', & YSB', & YSC', \\ ASa, & BSb, & CSc, \end{matrix}$ immer zwey und zwey einander ähnlich, mithin die Rechteke $\begin{matrix} SA \times YA', & SB \times YB', & SC \times YC' \\ SY \times Aa, & SY \times Bb, & SY \times Cc \end{matrix}$ immer zwey und zwey einander gleich; folglich ist die Summe der ersten Rechteke gleich der Summe der zweyten, d. h. gleich dem Rechtek, das zwischen SY, und der Summe der Linien Aa, Bb, Cc enthalten ist. Es seye Z der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, und man ziehe SZ, und fälle auf SY das Perpendikel Zz, und auf SZ das Perpendikel YZ′; so ist (Lehnsaz C.) $Aa + Bb + Cc = 3\,Zz$; folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\,SY \times Zz$. Aber, weil die Dreyeke YSZ′ und ZSz ähnlich sind; so ist $SY \times Zz = SZ \times YZ'$; folglich

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3\, SZ \times YZ'$. Es ist also das Rchtk $SZ \times YZ'$ der Grösse nach gegeben; folglich ist, weil SZ der Grösse nach gegeben ist, auch YZ' der Grösse nach gegeben. Aber YZ' ist senkrecht auf die der Lage nach gegebene gerade Linie SZ; mithin liegt der Punkt Y auf einer der Lage nach gegebenen mit SZ gleichlauffenden geraden Linie.

Komposition.

Man nehme auf den der Lage nach gegebenen Linien SA, SB, SC verhältnißmäßig gleich den der Grösse nach gegebenen Linien. Man suche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B, C (Lehns. C.), und ziehe SZ. Den der Grösse nach gegebenen Raum Q verwandle man in ein Rechtek, dessen eine Seite $= 3$ SZ seye, und errichte aus irgend einem Punkt von SZ ein Perpendikel gleich der andern Seite dieses Rechteks. Durch den Endpunkt dieses Perpendikels ziehe man eine Parallele mit SZ, so wird diese Parallele der gesuchte Ort seyn. Denn, wenn man aus irgend einem Punkt dieser Parallele Y die Perpendikel YA', YB', YC', YZ' auf SA, SB, SC, SZ zieht, hierauf auf SY die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Zz zieht; so wird, wie vorhin erwiesen, daß die Rechteke $SA \times YA'$, $SB \times YB'$, $SC \times YC'$, $SZ \times YZ'$ / $SY \times Aa$, $SY \times Bb$, $SY \times Cc$, $SY \times Zz$ immer zwey und zwey gleich seyen. Nun ist aber (Verzeichn. und Lehns. C.)

$SY \times Aa + SY \times Bb + SY \times Cc = 3\, SY \times Zz$.

folglich $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3 SZ \times YZ' = Q$.

1ste Bemerkung. Da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlauft; so hängt die Lage dieses Orts in Bezug auf die der Lage nach gegebenen Linien von der Lage des Punkts Z ab. Da nun das Dreyek ABC ganz innerhalb des Winkels ASC liegt, so liegt auch der Punkt Z innerhalb dieses Winkels, und zwar entweder in dem

Winkel

Winkel ASB, oder in dem Winkel BSC, oder auf der diesen beyden Winkeln gemeinschaftlichen Linie BS. Es liege

1. der Punkt Z in dem Winkel ASB; so durchstreist der Ort der Punkte Y die Gegenden A″SB″, B″SC″, C″SA, ASB.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′, YB′, YC′			Gleichungen
A″SB″	+	—	—	$Q = +SA \times YA' - SB \times YB' - SC \times YC'$
B″SC″	+	+	—	$Q = +SA \times YA' + SB \times YB' - SC \times YC'$
C″SA	+	+	+	$Q = +SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC'$
ASB	—	+	+	$Q = -SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC'$

Die Perpendikel nemlich, welche in Vergleich mit denen, die man als positiv ansieht, ihre Richtung ändern, haben das Zeichen —

Es seye nun

2. der Punkt Z in dem Winkel BSC; so durchstreist der Ort der Punkte Y die Gegenden B″SC″, C″SA, ASB, BSC.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
B″SC″	+	+	—
C″SA	+	+	+
ASB	—	+	+
BSC	—	—	+

3. liege der Punkt Z auf der den beyden Winkeln BSC, CSA gemeinschaftlichen Linie BS; so durchstreist der Ort der Punkte Y die den beyden vorigen Lagen gemeinschaftlichen Gegenden B″SC, C″SA, ASB, und es findet also eben das Statt, was bey den vorigen Lagen für diese Fälle.

2te Bemerkung. Man sieht aus diesem Beyspiel, daß man sich nicht mit der Summe der Rechteke, von denen die Rede ist, beschäftigen kann, das Wort Summe im eigentlichen, eingeschränkteren Sinn genommen, ohne sich zugleich mit dem Unterschied dieser Rechteke zu beschäftigen, welcher statt der Summe vorkommt, wenn die Richtung, folglich auch die Zeichen der Perpendikel sich ändern, die nach einer gewissen bestimmten Richtung hin als positiv angesehen werden.

2ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	+	—

Analyse und Komposition sind wie bey dem ersten Fall, wenn man nur statt des Punkts C den Punkt C″ nimmt, der auf der über S hinaus verlängerten Linie SC so genommen wird, daß SC″ = SC.

Bemerk. Der Punkt Z ist hier in dem Winkel BSC″, nemlich (mit Weglassung des gemeinschaftlichen Falls, wo Z auf SA liegt) entweder in dem Winkel ASB, oder ASC″.

Gegenden des Punkts Z.	Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
ASB - - - - -	A″SB″	+	—	+
	B″SC″	+	+	+
	C″SA	+	+	—
	ASB	—	+	—
ASC″ - - - -	CSA″	—	—	+
	A″SB″	+	—	+
	B″SC″	+	+	+
	C″SA	+	+	—

3ter

3ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
+	—	+

Wenn man statt des Punkts B den Punkt B″ nimmt, so, daß SB = SB; so bleiben Analyse und Komposition, wie für den ersten Fall.

1ste Bemerkung. Die Punkte A, C, B″ liegen in Bezug auf jede durch S gehende Linie auf verschiedenen Seiten derselben, mithin kann sich der Punkt Z innerhalb jedes der Winkel ASC, CSB″, B″SA finden, d. h. innerhalb einer jeden der 6 Gegenden, in welche die Ebene durch die der Lage nach gegebenen Linien und ihre Verlängerungen abgetheilt ist, und die Lage des Punkts Z hängt von der Grösse der gegebenen Linien SA, SB″, SC ab. Die Veränderungen der Zeichen der aus dem Punkt Y gefällten Perpendikel, die bey der Veränderung ihrer Richtung vorkommen, bestimmt man wie vorhin.

Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel YA′	YB′	YC′
ASC″ - - - - -	+	—	+
C″SB″ - - - - -	+	—	—
B″SA″ - - - - -	+	+	—
A″SC - - - - -	—	+	—
CSD - - - - -	—	+	+
BSA - - - - -	—	—	+

2te Bemerk. Die Möglichkeit, daß sich der Punkt Z in jeder der 6 Gegenden der Ebene befindet, macht einen ersten Unterschied zwischen diesem Fall und den vorhergehenden. Aber noch eine grössere findet sich darinn, daß es möglich ist, daß der Ort unmöglich wird. Wirklich, da der Ort der Punkte Y mit SZ gleichlaufsen soll, so muß, damit der Ort bestimmt werde, die

Lage

Lage von SZ selbst bestimmt seyn, und daher Z nicht auf S fallen. Denn wäre diß, so würde SZ jede beliebige Richtung haben können, folglich auch eben so der Ort der Punkte Y. Da nun, wenn 2 der Punkte A, B″, C auf einer Seite einer durch S gehenden geraden Linie sind, der dritte immer auf der entgegengesezten Seite liegt, und S der Schwerpunkt dieser 3 Punkte ist; so muß die Summe der 2 Perpendikel, die aus den Punkten gefällt werden, die auf einer Seite der geraden Linie liegen, gleich seyn dem Perpendikel, das aus dem Punkt auf der entgegen gesezten Seite gefällt wird. Folglich ist der Unterschied der Summe der beyden ersten Perpendikel und des lezten gleich Null. Also muß in diesem Fall auch der Raum $Q = 0$ seyn, folglich ist $3\,SZ \times YZ' = 0$, mithin kann, da $SZ = 0$ ist, YZ′ jeder beliebigen Grösse gleich seyn, oder Y kann jeder beliebige Punkt der Ebene seyn.

4ter Fall der Isten Lage des Punkts Y, wo nemlich

YA′	YB′	YC′
—	+	+

Wenn man den Punkt A″ statt des Punkts A sezt, so bleibt alles übrige, wie bey dem ersten Fall. Der Ort ist bestimmt.

Gegenden des Punkts Z.	Gegenden des Punkts Y	Zeichen der Perpendikel		
		YA′	AB′	YC′
A″SC - - - - -	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+
	CSA″	+	—	—
BSC - - - -	B″SC″	—	+	—
	C″SA	—	+	+
	ASB	+	+	+
	BSC	+	—	+

IIte Lage des Punkts Y innerhalb des Winkels ASB.

Unterabtheilung. Man bringt, wie bey der ersten Lage alle Fälle auf die 4 folgenden Veränderungen der Zeichen der Perpendikel

YA′	YB′	YC′
+	+	+
+	+	—
+	—	+
—	+	+

1ster Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
+	+	+

Dieser Fall hat Verbindung mit dem 4ten Fall der ersten Lage, und der Punkt Z ist der Schwerpunkt der Punkte A″, B, C.

2ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
+	+	—

Man seze statt der Punkte A, C die Punkte A″, C″; so ist Z der Schwerpunkt der Punkte A″, B, C″. Dieser Fall kann unbestimmt werden, wie der 3te Fall der 1sten Lage.

3ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
+	—	+

Man seze die Punkte A″, B″ statt A, B; so ist Z der Schwerpunkt der Punkte A″, B″, C, und der Ort ist bestimmt.

4ter Fall der IIten Lage.

YA′	YB′	YC′.
—	+	+

Dieser Fall kommt mit dem 1sten Fall der Isten Lage überein, und der Punkt Z ist der Schwerpunkt der Punkte A, B, C.

Es läßt sich leicht auch durch Rechnung der Winkel bestimmen, unter welchem der gesuchte Ort die der Lage nach gegebenen geraden Linien schneidet. Z. B. für den ersten Fall der Isten Lage des Punkts Y, wenn der

der Punkt Z innerhalb des Winkels ASB ist. Man denke sich aus A, B, C auf SZ Perpendikel gefällt, so wird ihr Werth seyn:

$SA.\ \sin.\ ASZ;\ SB.\ \sin.\ BSZ;\ SC.\ \sin.\ CSZ$, und nach Lehnsaz C. ist

$$SA.\ \sin.\ ASZ = SB.\ \sin.\ BSZ + SC.\ \sin.\ CSZ$$
$$= SB.\ \sin.\ (ASB - ASZ) + SC\ \sin.\ (ASC - ASZ)$$

folglich ist $\sin.\ ASZ(SA + SB.\ \cos.\ ASB + SC.\ \cos.\ ASC)$
$$= \cos.\ ASZ\ (SB.\ \sin.\ ASB + SC.\ \sin.\ ASC)$$

oder $\text{tang.}\ ASZ = \dfrac{SB.\ \sin.\ ASB + SC.\ \sin.\ ASC}{SA + SB.\ \cos.\ ASB + SC.\ \cos.\ ASC}$

Eben so wird

$$\text{tang.}\ BSZ = \frac{SA.\ \sin.\ ASB - SC.\ \sin.\ BSC}{SB + SA.\ \cos.\ ASB + SC.\ \cos.\ ASC}$$

und $\text{tang.}\ CSZ = \dfrac{SA.\ \sin.\ ASC + SB.\ \sin.\ BSC}{SC + SA.\ \cos.\ ASC + SB.\ \cos.\ BSC}$

Bemerk. Diese Formeln enthalten alle Lagen des Punkts Z. Er ist nemlich in dem Winkel ASB, auf der Linie SB, oder in dem Winkel BSC, je nachdem $SA\ \sin.\ ASB >=< SC.\ \sin.\ BSC$ ist. Ferner, wenn man die Zeichen von SA, SB, SC ändert, so wie sich die Richtungen der Perpendikel ändern; so erhält man alle oben angeführte Fälle. Z. B. wenn die Perpendikel auf SB als negativ betrachtet werden; so wird

$$\text{tang.}\ ASZ = \frac{-SB.\ \sin.\ ASB + SC\ \sin.\ ASC}{SA - SB.\ \cos.\ ASB + SC.\cos.\ ASC}$$

welches bey dem 3ten Fall der Isten Lage des Punkts Y Statt findet.

Ist nun zu gleicher Zeit $SB.\ \sin.\ ASB = SC.\ \sin.\ ASC$, und $SA + SC\ \cos.\ ASC = SB\ \cos.\ ASB$; so verschwinden Nenner und Zähler des Bruchs zu gleicher Zeit, die Tangente wird also unbestimmt, mithin der Ort der Punkte Y unbestimmt.

 Um

Um nun noch die Entfernung des Orts von SZ zu bestimmen, muß die Grösse von SZ bestimmt werden. Man denke sich eine Linie durch S senkrecht auf SA, und fälle auf diß Perpendikel sowohl, als auf SA selbst aus den gegebenen Punkten A, B, C, und dem Schwerpunkt Z Perpendikel; so sind die erste mit SA gleichlauffende Perpendikel der Ordnung nach diese SA; SB. cosin. ASB; SC. cosin. ASC; SZ. cosin. ASZ, und die auf SA selbst gefällten Perpendikel sind SB. sin. ASB; SC. sin. ASC; SZ sin. ASZ, und nach Lehns. C. hat man die beyden Gleichungen:

7. SZ. cosin. ASZ = SA + SB. cosin. ASB + SC. cosin. ASC, und

8. SZ. sin. ASZ = SB. sin. ASB + SC. sin. ASC. Erhebt man sie ins Quadrat, und addirt sie; so erhält man

9. $SZ^2 = (SB.\ \sin.\ ASB + SC.\ \sin.\ ASC)^2 + (SA + SB.\ \cos.\ ASB + SC.\ \cos.\ ASC)^2$.

Hat man auf diese Art SZ gefunden; so ist, wenn der gegebene Raum Q heißt, die Entfernung des Orts von SZ, d. h. $YZ' = \frac{Q}{3SZ}$.

Die ausführliche Behandlung dieses besondern Falls, wenn 3 gerade Linien, die sich in einem Punkt schneiden, der Lage nach gegeben sind, wird nun, auch ohne besondere Figur, den allgemeinen Saz, wenn jede beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach gegeben ist, leicht verständlich machen.

Es seye also jede beliebige Anzahl n von geraden Linien SA, SB, SC, SD . . . SL, SM, SN der Lage nach gegeben, so, daß die Winkel ASB, ASC . . . ASM, ASN immer grösser und grösser werden, und doch der gröste derselben ASN kleiner ist als 2 rechte Winkel. Man fragt nach dem Ort der Punkte Y, die

so

so beschaffen sind, daß, wenn man von einem derselben auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien die Perpendikel YA′, YB′, YC′, YD′ . . . YL′, YM′, YN′ fällt, die Summe oder der Unterschied der Rechteke, den diese Perpendikel mit eben so viel der Grösse nach gegebenen geraden Linien einschliessen, gleich seye einem gegebenen Raum Q. Man trage auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien von beyden Seiten des Punkts S

die Linien SA, SB, SC, ... SL, SM, SN′ SA″, SB″, SC″, SL″, SM″, SN″ verhältnißmäßig gleich den der Grösse nach gegebenen geraden Linien. Man betrachte zuerst die Perpendikel als positiv, die aus einem innerhalb des Winkels ASN″ gelegenen Punkt Y gefällt werden. Man denke sich SY gezogen, und darauf die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd . . . Ll, Mm, Nn gefällt. Nun sind die Dreyeke YSA′, YSB′, YSC′ . . . YSL′, YSM′, YSN′ verhältnißmäßig gleich den Dreyeken ASa, BSb, CSc . . . LSl, MSm, NSn. Folglich sind die Rechteke SA×YA′, SB×YB′, SC×YC′ . . . SL×YL′, SM×YM′, SN×YN verhältnißmäßig gleich den Rechteken SY×Aa, SY×Bb, SY×Cc . . . . SY×Ll, SY×Mm, SY×Nn, folglich ist die Summe der ersten Rechteke, d. h. der gegebene Raum Q gleich dem Rechtek, das zwischen SY, und der Summe der Linien Aa, Bb, Cc . . . . . Ll, Mm, Nn enthalten ist. Es seye Z der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Punkte A, B, C . . . . L, M, N, und Zz seye senkrecht auf SY, und YZ′ senkrecht auf SZ; so erhält man (Lehnſ. C.) Aa + Bb + Cc . . . + Ll + Mm + Nn = n. Zz. Folglich Q = n. SY×Zz, oder $\frac{1}{n}$ Q = SY×Zz. Es sind aber die Dreyeke YSZ′, ZSz ähnlich, folglich ist SY×Zz = SZ×YZ′;

 also

also $\frac{1}{n}$ Q = SZ × YZ′; mithin ist das Rechtek SZ×YZ′ gegeben; es ist aber SZ der Grösse nach gegeben, folglich auch YZ′, und weil YZ′ auf der der Lage nach gegebenen Linie SZ senkrecht ist, so berührt Y eine der Lage nach gegebene, mit SZ gleichlauffende gerade Linie (20. Saz Apoll.)

Komposition.

Man suche Z den Schwerpunkt der Punkte A, B, C, ... L, M, N, und ziehe SZ. Man verwandle den gegebenen Raum Q in ein Rechtek, dessen eine Seite die gerade Linie SZ so vielmahl genommen seye, als gerade Linien der Lage nach gegeben sind; aus irgend einem Punkt von SZ errichte man darauf ein Perpendikel gleich der andern Seite dieses Rechteks. Durch den Endpunkt dieses Perpendikels ziehe man eine gerade Linie mit SZ gleichlauffend, so wird diese der gesuchte Ort seyn. Der Beweis fließt unmittelbar aus der Analyse.

1ste Bemerkung. Die Lage des Punkts Z in einem der Winkel ASB, BSC . . . MSN hängt von der Lage der Punkte A, B, C . . . L, M, N, d. h. von der Grösse der der Grösse nach gegebenen Linien ab; folglich, da der gesuchte Ort mit SZ gleichlauft; so hängt auch die Lage der Theile dieses Orts in den Winkeln ASB, BSC u. s. w. von der Grösse eben dieser Linien ab. Und die Aenderung der Zeichen der von den Punkten Y in diesen verschiedenen Gegenden gefällten Perpendikel hängt von der Aenderung ihrer Richtungen in Bezug auf diejenige ab, die man anfänglich als positiv betrachtete. Folgende 2 Beyspiele mögen hinreichend seyn.

Winkel,

Winkel in welchen Z ist.	Winkel in welchen Y ist.	Zeichen der Perpendikel. YA′,	YB′,	YC′, …	YL′,	YM′,	YN′
ASB - - - -	BSA	—	+	+ ….	+	+	+
	ASN″	+	+	+ …	+	+	+
	N″SM″	+	+	+ ….	+	+	—
	M″SL″	+	+	+ …	+	—	—
	.	.					
	.	.					
	.	.					
	.	.					
	D″SC″	+	+	+ ….	—	—	—
	C″SB″	+	+	— ….	—	—	—
	B″SA″	+	—	— ….	—	—	—
BSC - - - -	CSB	—	—	+ ….	+	+	+
	BSA	—	+	+ ….	+	+	+
	ASN″	+	+	+ ….	+	+	+
	N″SM″	+	+	+ ….	+	+	—
	M″SL″	+	+	+ ….	+	—	—
	.	.					
	.	.					
	.	.					
	.	.					
	D″SC″	+	+	+ ….	—	—	—
	C″SB″	+	+	— ….	—	—	—

Diese Beyspiele zeigen wieder, daß man von der Summe im eingeschränktern Verstand nicht reden kann, ohne zugleich die damit in Verbindung stehenden Unterschiede zu betrachten, und daß man immer auf die Richtungen Rüksicht nehmen muß, nach welchen ein Perpendikel als positiv oder negativ betrachtet wird, um hienach die Zeichen gehörig zu verändern. Ohne zu grosse Weitläuffigkeit können hier nicht alle Voraussezungen

zungen betrachtet werden, die man in Rüksicht auf die Perpendikel machen kann, welche man als positiv oder negativ betrachtet. Wir wollen nur einen Fall in Betracht ziehen. Es seye der Punkt Y in dem Winkel ASN″, und die Zeichen der Perpendikel diese

YA′, YB′, YC′, YD′ .... YL′, YM′, YN′.
+ — — + . . + — +

Man seze bey der Auflösung statt B, C, M die Punkte B″, C″, M″, und suche den Schwerpunkt Z der Punkte A, B″, C″, D .... L, M″, N; so ist der gesuchte Ort, wenn er bestimmt ist, mit SZ gleichlauffend.

Da in diesem Fall, wenn man durch S irgend eine gerade Linie zieht, einige der Punkte A, B″, C″... L, M″, N auf die eine, und andere nothwendig auf die andere Seite dieser geraden Linie fallen; so muß der Punkt Z in keine bestimmte Gegend der Winkel fallen, in welche die Ebene durch die der Lage nach gegebene gerade Linien getheilt ist. Fallen die Punkte S und Z zusammen, so kann die Linie SZ jede beliebige Richtung haben, und der verlangte Ort ist unbestimmt, der gegebene Raum Q aber muß in diesem Fall nothwendig = 0 werden, welches, wie oben in dem Fall für 3 gerade Linien erwiesen wird.

Uebrigens drükt sich die Veränderung der Richtung der Perpendikel in Bezug auf die, welche man anfänglich als positiv betrachtete, durch die Substitution der Punkte A″, B″, C″... L″, M″, N″ statt A, B, C... L, M, N aus, und die Konstruction bleibt übrigens immer in allen Fällen die nemliche.

Weil der Ort mit SZ gleichlauft; so macht er mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien verhältnißmäßig die nemlichen Winkel, welche SZ mit ihnen macht. Nun bestimmt man diese lezte Winkel durch die aus dem Lehns. C. fliessende Gleichung:

SA:

$$SA.\sin.ASZ + SB.\sin.BSZ + SC.\sin.CSZ \ldots\ldots SL.\sin.LSZ + SM.\sin.MSZ + SN.\sin.NSZ = 0.$$ Hieraus folgt

$$\text{tang.}ASZ = \frac{SB.\sin.ASB + SC.\sin.ASC + \ldots}{SA + SB.\text{cosin}.ASB + SC.\text{cosin}.ASC + \ldots} \frac{\ldots SL.\sin.ASL + SM.\sin.ASM + SN\ \sin.ASN}{\ldots SL.\text{cosin}.ASL + SM.\text{cosin}.ASM + SN.\text{cosin}.ASN}.$$

Man findet folglich den Winkel, unter welchem SZ, folglich auch der damit gleichlauffende Ort die der Lage nach gegebenen geraden Linien schneidet.

Nimmt man nun ferner die Linie SZ so oft, als gerade Linien der Lage nach gegeben sind, also n mahl; so ist $n^2.SZ^2$ gleich der Summe der Quadrate der beyden Glieder des Bruchs, der die Tangente ASZ ausdrükt.

Verändert man die Zeichen derjenigen unter den Linien SA, SB, SC ... SL, SM, SN, die man als negativ betrachtet; so wird der vorige Ausdruk allgemein für alle Fälle der Summe und der Unterschiede. Verschwinden die beyden Glieder des Bruchs zugleich; so wird der Ausdruk für die Tangente unbestimmt, SZ, folglich auch Q verschwinden, und alle Punkte der Ebene haben einerley Eigenschaft in Bezug auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien.

Haben hingegen (welches der 2te Hauptfall ist) die der Lage nach gegebenen geraden Linien nicht alle einerley gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt; so zeigt Herr l'Huilier, daß sich dieser Fall ganz leicht auf den vorhergehenden zurük bringen lasse. Wirklich nehme man in der Ebene, in welcher die der Lage nach gegebenen Punkte liegen, irgend einen Punkt, und ziehe durch denselben Parallelen mit allen diesen Linien. Die Perpendikel, die man von irgend einem Punkt dieser Ebene auf die der Lage nach gegebenen Linien fällt, sind

 die

die Summen oder die Unterschiede der Perpendikel, die man von dem nemlichen Punkt auf die gezogenen Parallelen fällen kann, und der Entfernungen dieser leztern von den der Lage nach gegebenen Linien. Da nun diese Entfernungen beständig gleich groß bleiben; so ist die Summe der Rechteke, die enthalten sind zwischen den auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikeln, und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen geraden Linien, um eine beständige Grösse verschieden von der Summe der Rechteke, die zwischen eben diesen der Grösse nach gegebenen Linien, und zwischen den auf die gezogenen Parallelen von eben dem Punkt gefällten Perpendikeln enthalten sind. Ist daher die erste Summe gegeben; so ist es die zweyte auch. Mithin berührt nach dem vorhergehenden Fall, der Punkt, aus dem die Perpendikel gefällt sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Herr l'Huilier zieht nun nach weiterer Entwiklung dieses Falls aus allem Bisherigen noch einige Folgerungen, von denen ich die zwey ersten hieher seze:

1. Wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien der Lage nach auf einer Ebene gegeben ist; und wenn in der nemlichen Ebene andere gerade Linien ebenfalls in beliebiger Anzahl der Lage nach gegeben sind; so ist (wenn anders der Ort bestimmt ist) eine gerade Linie der Ort aller Punkte von der Beschaffenheit, daß, wenn man aus einem derselben auf alle der Lage nach gegebene Linien Perpendikel fällt, die Summe der Rechteke, die zwischen den Perpendikeln, die auf die ersten geraden Linien gefällt werden, und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen Linien enthalten sind, zu der Summe der Rechteke, die zwischen den auf die zweyte gerade Linien gefällten Perpendikeln und zwischen eben so viel der Grösse nach gegebenen geraden Linien enthalten sind, ein gegebenes Verhältniß hat. Der Beweis dieses

Zusazes

Zusazes läßt sich leicht finden, und eben so von dem folgenden.

2. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl gerader Linien der Grösse und Lage nach gegeben ist; so ist eine gerade Linie der Ort von den Scheiteln von Dreyeken, deren Summe gegeben ist, und welche die gegebenen geraden Linien zu Grundlinien haben. Hiemit ist 37, I. Elem. allgemeiner gemacht.

Das bisher angeführte l'Huiliersche Verfahren scheint vor dem Simsonschen bedeutende Vorzüge zu haben, theils in der Leichtigkeit der ganzen Behandlung; theils in der Allgemeinheit, womit die nemliche Auflösung unmittelbar auf jede beliebige Anzahl gegebener Linien anwendbar ist, statt daß nach Simsons Verfahren der Fall von einer gewissen Anzahl von Linien immer erst auf die um Eins geringere Anzahl, und so fort bis endlich auf nur 2 Linien herabgebracht werden muß; endlich auch noch durch die Art, wie der Fall, in welchem die der Lage nach gegebenen Linien keinen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, auf den ersten zurük gebracht wird, wo sie einen haben.

30. Saz.

Wenn aus einem Punkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie zwey gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke, welche auf der der Lage nach gegebenen Linie zwischen den gezogenen Linien und einem, oder zwey gegebenen Punkten abgeschnitten sind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt, aus welchem die zwey Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig.

Fig. 45. a.

1. Fall. Wenn Ein Punkt gegeben ist. Es seyen aus dem Punkt A an die der Lage nach gegebene gerade Linie BC, auf welcher der Punkt D gegeben ist, zwey gerade Linien AE, AF unter den gegebenen Winkeln AED, AFD gezogen, und das Verhältniß von DE zu DF seye gegeben; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn, weil das Verhältniß von DE zu DF gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von DE zu EF gegeben (6. D.), und, weil das Dreyek EAF der Gattung nach gegeben ist (43. D.); so ist das Verhältniß von EF zu EA gegeben; also ist (9. D.) das Verhältniß von DE zu EA gegeben, und, weil auch der Winkel DEA gegeben ist; so ist, DA noch gezogen, das Dreyek DEA der Gattung nach gegeben (44. D.); und, weil der Punkt D gegeben ist; so ist DA der Lage nach gegeben (32. D.).

Komposition.

Man nehme auf der Linie BC irgend zwey Punkte G, H so, daß DG zu DH in dem gegebenen Verhältniß seye; aus diesem ziehe man GH, HK unter den gegebenen Winkeln; durch die Punkte D, K ziehe man die gerade Linie DK, und verlängere sie nach Belieben; so wird diß der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben an BC die geraden Linien AE, AF mit KG, KH gleichlauffend; so ist DE : DG = (DA : DK =) DF : DH, und verwechselt DE : DF = DG : DH, d. i. in dem gegebenen Verhältniß. Diese Komposition ist etwas kürzer, als diejenige, welche man finden würde, wenn man genau der Analyse folgte. Es geschieht diß öfters, wenn man eine gerade Linie bey der Komposition brauchen kann, die man bey der

der Analyse noch nicht brauchen durfte, wie hier die gerade Linie DK.

Fig. 45. b.

2. Fall. Wenn 2 Punkte gegeben sind. Es seyen die Punkte B, C gegeben, aus A werden an BC die geraden Linien AE, AF unter den gegebenen Winkeln gezogen, und es seye das Verhältniß von BE zu CF gegeben. Weil also die Punkte B, C gegeben, und auf der Linie BC die Punkte E, F so genommen sind, daß das Verhältniß von BE zu CF gegeben ist; so ist ein anderer Punkt D gegeben, so, daß das Verhältniß von DE zu DF dem gegebenen gleich werde. Man nehme nemlich DB zu DC in dem gegebenen Verhältniß von BE zu CF; so hat (12, 5. E. oder 19, 5. E.) DE zu DF das nemliche gegebene Verhältniß. Und, weil BC gegeben ist; so ist der Punkt D gegeben, also berührt der Punkt A nach dem vorhergehenden Fall eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Und, wenn man den Punkt D findet, wie gesagt worden, BG, CG unter den gegebenen Winkeln, und durch die Punkte D, G die gerade Linie DG zieht, und verlängert; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AE, AF mit BG, CG gleichlauffend; so wird, wie beym vorhergehenden Fall erwiesen, daß DE : DF = DB : BC seye. Also ist (19, 5. E. oder 12, 5. E.) BE : CF = DB : DC, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Berech-

Berechnung.

Fig. 45. a.

1. Fall. Es ist AD : DF = sin. AFD : sin. (AFD + ADF)
DE : AD = sin. (AED + ADF) : sin. AED

mithin DE : DF = sin. AFD. sin. (AED + ADF) : sin. AED : sin. (AFD + ADF)
= cotang. ADF + cotang. AED : cotang. ADF + cotang. AFD

folglich ist $\text{ctg. ADF} = \dfrac{\text{DF. ctg. AED} - \text{DE. ctg. AFD}}{\text{DE} - \text{DF}}$

Fig. 45. b.

2. Fall. Der Punkt D wird leicht bestimmt, und so ist dieser Fall auf den vorigen zurük gebracht. Man findet nemlich

$$\text{CD} = \frac{\text{BC. CF}}{\text{BE}-\text{CF}},\ \text{und ctg. ADF} = \frac{\text{CF. ctg. AED} - \text{BE. ctg. AFD}}{\text{BE} - \text{CF}}.$$

31. Saz.

31. Saz.

Fig. 46.

Wenn aus einem Punkt G an zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien AB, CD zwey gerade Linien GH, GK unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke EH, FK, welche auf den der Lage nach gegebenen Linien zwischen gegebenen Punkten E, F, und zwischen diesen gezogenen Linien abgeschnitten sind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt G, aus welchem die Linien gezogen sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 46. a.

I. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffen. Es seye

1) EH = FK oder das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit. Man ziehe EF, HK. Weil nun die Punkte E, F gegeben sind; so ist EF der Lage und Grösse nach gegeben. Nach der Voraussezung aber sind EH, FK gleich, und gleichlauffend; also sinds auch EF, HK; folglich ist HK der Grösse nach gegeben. Der Winkel KHB aber ist gleich dem gegebenen FEB, und, nach der Voraussezung ist BHG gegeben, also ist der Winkel KHG gegeben. Eben so ist auch der Winkel HKG gegeben; also ist das Dreyek GHK der Gattung nach gegeben; nun ist KH der Grösse nach gegeben, folglich auch HG. Weil also aus dem Punkt G an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine der Grösse nach gegebene gerade Linie GH unter einem gegebenen Winkel GHB gezogen ist; so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende Linie nach dem 20sten Saz.

Kompo-

Komposition.

Man ziehe EF, und EL, FL unter den gegebenen Winkeln, diese beyde Linien begegnen einander in L; durch L ziehe man LG mit AB, CD gleichlauffend; so wird LG der gesuchte Ort seyn. Denn aus irgend einem Punkt G auf derselben ziehe man an AB, CD die geraden Linien GH, GK mit LE, LF gleichlauffend; so ist, weil die Figuren ELGH, GKFL Pellgrmme sind, EH gleich LG, d. i. gleich FK.

Fig. 46. b.

2. Es seye nicht EH = FK, oder das gegebene Verhältniß seye nicht das Verhältniß der Gleichheit, und das übrige bleibe, wie vorhin. Es begegne GK der Linie AB in L, und man ziehe FM an AB mit GK gleichlauffend. Weil nun FK, ML gleich sind, und nach der Voraussezung das Verhältniß von EH zu FK, gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von EH zu ML gegeben; es ist aber die Linie FM der Lage nach gegeben, denn sie ist aus einem gegebenen Punkt F auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD unter einem gegebenen Winkel gezogen (32. D.), und, weil auch AB der Lage nach gegeben ist; so ist der Punkt M gegeben. Weil also 2 Punkte E, M auf der geraden Linie AB gegeben sind, und an diese Linie die Linien GH, GL unter gegebenen Winkeln gezogen sind, und die Stüke EH, ML ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes.

Komposition.

Aus dem Punkt F auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie CD ziehe man an die andere der Lage nach

gege-

gegebene gerade Linie AB, die gerade Linie FM, unter einem Winkel gleich dem, den die an CD zu ziehende Linie mit CD einschliessen soll; und nun finde man, wie bey dem 2ten Fall des vorhergehenden Sazes gezeigt worden, eine gerade Linie NO, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt derselben an die gerade Linie AB zwey gerade Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, die Stüke EH, ML, welche zwischen den Punkten E, M, und den gezogenen Linien abgeschnitten sind, das gegebene Verhältniß unter einander haben; so wird die Linie NO der gesuchte Ort seyn. Denn aus irgend einem Punkt G auf derselben ziehe man an AB, CD die Linien GH, GLK unter den gegebenen Winkeln. Es sind also nach der Verzeichnung LK, FM gleichlauffend, und weil EH zu ML das gegebene Verhältniß hat, und ML gleich ist FK; so hat auch EH zu FK das gegebene Verhältniß.

II. Fall. Wenn die der Lage nach gegebenen geraden Linien einander schneiden. Es schneiden einander die der Lage nach gegebenen Linien AB, CD in dem Punkt B, und unter gegebenen Winkeln seyen an dieselbe die geraden Linien GH, GK gezogen, die

Fig. 46. c.

1. mit CD, AB gleichlauffend seyen, und die Stüke HE, KF, welche zwischen den gezogenen Linien und gegebenen Punkten E, F abgeschnitten sind, haben ein gegebenes Verhältniß unter einander. Man ergänze das Prllgrm EBFM, und GK begegne der Linie EM in N. Weil nun EH, KF gleich sind GN, NM, und der Winkel MNG gegeben ist; so ist, die gerade Linie MG gezogen, das Dreyek GMN der Gattung nach gegeben, (44. D.) also ist der Winkel NMG gegeben; nun ist die Lage von EM, und der Punkt M gegeben; also ist die gerade Linie MG der Lage nach gegeben (32. D.).

Die Komposition erhellt von selbst. Man ergänze nemlich das Prllgrm BM, nehme OE zu EM in dem gegebenen Verhältniß, und ziehe die Linie MO; so wird diese der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt G auf derselben die geraden Linien GH, GK, wie gesagt worden; so ist GN : NM, d. i. EH : FK = OE : EM, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Fig. 46. d. e.

2. Es seyen nicht beyde gezogene Linien mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffend, und das übrige bleibe, wie vorhin. Wenn eine der gezogenen Linien GH mit einer von den der Lage nach gegebenen Linien, z. B. mit CD gleichlauffend ist; so ziehe man durch den gegebenen Punkt F auf der Linie CD eine mit der andern der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffende Linie FL; ist aber keine der gezogenen Linien GH, GK mit einer von den der Lage nach gegebenen geraden Linien gleichlauffend; so ziehe man, auf welcher der gegebenen Linien man will, z. B. auf CD durch den gegebenen Punkt F eine mit der andern der Lage nach gegebenen geraden Linie AB gleichlauffende Linie FL, und FL begegne in beyden Fällen, der an CD gezogenen Linie GK in dem Punkt L. Es ist also FL der Lage nach gegeben (31. D.); und, weil in dem Dreyek FKL die Winkel KFL, FKL gegeben sind; so ist das Verhältniß von KF zu FL gegeben, nach der Voraussezung aber ist das Verhältniß von EH zu FK gegeben; also ist (9. D.) auch das Verhältniß von EH zu FL gegeben. Weil also an 2 der Lage nach gegebene Parallel-Linien AB, FL zwey gerade Linien GH, GL unter gegebenen Winkeln gezogen sind, und die Stüke EH, FL, die zwischen den gezogenen Linien und den auf den Parallelen gegebenen Punkten E, F abgeschnit-

schnitten sind, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten vorhergehenden Fall.

Komposition.

Es seye das Verhältniß von FM zu FN gleich dem gegebenen Verhältniß, welches nemlich das Stük auf der Linie AB zu dem Stük auf der Linie CD haben soll, und durch den Punkt N ziehe man NO mit GK gleichlauffend, durch F aber ziehe man FL mit AB gleichlauffend, und FL begegne der Linie NO in O: und, vermittelst des vorhergehenden Falls, finde man die Linie GP, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt derselben G die geraden Linien GH, GL an die Parallelen AB, FO unter den gegebenen Winkeln zieht, die Stüke EH, FL, welche zwischen diesen gezogenen Linien und zwischen den gegebenen Punkten E, F abgeschnitten sind, eben das Verhältniß unter einander haben, welches FM zu FO hat; so werden eben diese Linien GH, GL auf AB, CD die Stüke EH, FK so abschneiden, daß diese eben das Verhältniß unter einander haben, welches FM zu FN hat. Denn, weil nach der Verzeichnung

$$EH : FL = FM : FO$$
und $$FL : FK = FO : FN$$

so ist gleichförmig (ex aequo) $EH : FK = FM : FN$.

Schooten fügt diesem Ort, bey dem Fall, wo die der Lage nach gegebenen geraden Linien unter einander gleichlauffen, folgende Bemerkung bey, S. 249 seiner Exercitationum Mathematicarum: „Es ist zwar die„ser Saz allgemein, und findet Statt, wie groß auch „die Anzahl der Parallel-Linien seyn mag, inzwischen „hielt ich es doch für der Mühe werth, der vollständi-

„gern Entwikelung wegen folgende Operation bei zuse„zen.“ Hierauf giebt er eine Algebraische Operation an, vermittelst welcher er den Saz in dem Fall von 3 geraden Linien zu beweisen glaubt. Allein hier fiel er offenbahr in einen groben Fehler, worein er durch seine nicht genau genug angestellte Rechnung verleitet wurde, da er nemlich seine Aufmerksamkeit mehr auf die Zeichen des Kalkuls, als auf die Sache selbst richtete. Denn, wenn aus einem Punkt an 3 der Lage nach gegebene gerade Parallelen 3 gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Stüke, welche auf den Parallelen zwischen gegebenen Punkten und zwischen den gezogenen Linien abgeschnitten werden, ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; wer sieht nicht sogleich, daß dieser Punkt schon wegen 2 auf gedachte Art gezogenen Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühre, und daß der nemliche Punkt wegen einer von diesen 2 Linien, und wegen der dritten noch eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie berühren müsse (denn ausser zufälligen Umständen wird die leztere mit der erstern nicht einerley seyn), daß also dieser Punkt gegeben seye, und der Saz keinen Ort, sondern eine Aufgabe enthalte. Wenn aber mehr als 3 Parallelen der Lage nach gegeben sind, so wird (ausser unter zufälligen Umständen) kein Punkt gefunden werden können, der dem verlangten eine Genüge leistete. Schooten aber gerieth dadurch in diesen Irrthum, weil er nicht bemerkte, daß die gerade Linie CD die bey ihm durch die Zeichen $\frac{bx - ay}{c}$ ausgedrükt ist, auch durch $x - a$ ausgedrükt werden könne: hätte er diß gethan, so hätte er eine Gleichung erhalten, in welcher nur eine von den unbekannten Grössen x, y enthalten gewesen wäre. Eben diesen aus der nemlichen Quelle herfliessenden Fehler

ker wiederholt er nochmahlen für den Fall, wenn die beyden der Lage nach gegebenen geraden Linien sich schneiden.

Fig. 46. f.

Es scheint übrigens dieser Saz den Apollonischen von späterer Hand beigefügt zu seyn. Denn, er ist nur sehr wenig von dem 22sten und 23sten Saz verschieden. Denn, es seyen an die geraden Linien AB, CD die zwey Linien GH, GK unter gegebenen Winkeln gezogen, und die Stüke HE, KF die auf den gegebenen Linien zwischen gegebenen Punkten E, F, und zwischen den gezogenen Linien abgeschnitten sind, haben ein gegebenes Verhältniß unter einander, und man ergänze die Prllgrmme EHGL, FKGM; so sind folglich EL, FM der Lage nach gegeben, und überdiß sind auch die Winkel bey L, M gegeben, die nemlich den gegen über stehenden bey H, K gleich sind. Weil also aus einem Punkt G an die der Lage nach gegebenen Linien EL, FM zwey gerade Linien GL, GM, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, (denn sie sind den Linien HE, KF gleich) unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt G nach dem 22sten oder 23sten Saz eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Inzwischen, weil dieser Saz doch bey Pappus vorkommt, gab ich ihm eine eigene Auflösung, und sezte ihm den 30sten Saz vor, der bey Pappus nicht vorkommt.

Berechnung.

Fig. 46. a.

I. Fall. 1. Der Punkt L, durch welchen die mit AB gleichlauffende Linie LG geht, wird leicht bestimmt. Es ist nemlich in dem Dreyek LEF die

Seite EF nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben.

Fig. 46. b.

2. In dem Dreyek EFM findet man

$$EM = \frac{EF.\ \sin.\ (GKC - BEF)}{\sin.\ GKC}.$$ Hieraus findet man, wie in dem 2ten Fall des 20sten Sazes

$$EN = \frac{EM.\ EH}{FK - EH},$$ und

$$\cot. GNB = \frac{EH. \cot. GKC - FK. \cot. GHA}{FK - EH}.$$

Fig. 46. c.

II. Fall. 1. In dem Dreyek EMO ist EM = BF gegeben, und $EO = \frac{BF.\ EH}{FK}$, und der eingeschlossene Winkel MEO gleich dem gegebenen Winkel ABC, also findet man leicht das übrige.

Fig. 46. d. e.

2. Es ist KF : FL = sin. KLF : sin. LKC
und EH : KF = EH : KF

folglich EH : FL = EH. sin. KLF : KF. sin. LKC

und so ist dieser Fall auf den Isten Fall zurük gebracht.

32. Saz.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Parallelen BC, DE zwey gerade Linien AF, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und das Rechtek GAF, welches diese Linien einschliessen, einem

nem gegebenen Raum gleich ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 47. a.

1. Fall. Wenn der Punkt A zwischen den Parallelen liegt. Es begegne AG der Linie BC in dem Punkt H, so ist, weil der Winkel AGD gegeben ist, der ihm gleiche AHF ebenfalls gegeben; es ist aber auch der Winkel AFH gegeben, mithin ist das Dreyek AFH der Gattung nach gegeben (43. D.), also ist das Verhältniß von AF zu AH, oder das Verhältniß des Rechteks GAF zu dem Rechtek GAH gegeben; nach der Voraussezung aber ist das Rechtek GAF gegeben, also ist auch das Rechtek GAH gegeben; und weil die gerade Linie GH der Grösse nach gegeben ist (35. D.), so ist auch GA der Grösse nach gegeben (86. D.); es ist aber auch der Winkel AGD gegeben, mithin berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Weil aber zur Komposition erfodert wird, nemlich nach 86. D., daß das gegebene Rechtek GAH über einem Stük von der der Grösse nach gegebenen Linie GH beschrieben, und über dem andern Stük der Linie GH als Ergänzung des vorigen Rechteks ein Quadrat errichtet werde, und, weil diß (27, 6. E.) nicht geschehen kann, ausser wenn dieser gegebene Raum GAH nicht grösser ist, als das Quadrat auf der Hälfte der Linie GH; so wird der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Ist aber der gegebene Raum, dem das Rechtek GAF gleich seyn soll, gerade von der Beschaffenheit, daß der Punkt A auf die Mitte von GH fällt, so wird nur eine einige gerade Linie dem Ort Genüge thun. Den Raum nun, der gerad diese Beschaffenheit hat,

findet man, wenn man aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE an BC die geraden Linien GH, GM unter den gegebenen Winkeln zieht; denn, wenn man GH in K in zwey gleiche Theile theilt, und KL mit GM gleichlauffend zieht, so wird der gesuchte Raum gleich seyn dem Rechtek GKL; es ist aber wegen der Parallelen KH : KL = GH : GM; also nach 1, 6. E. das Rechtek GKH : Rechtek GKL = Quadrat GH : Rechtek HGM; es ist aber das Rechtek GKH gleich dem Quadrat von GK, d. i. gleich dem vierten Theil des Quadrats von GH; also ist das Rechtek GKL gleich dem vierten Theil vom Rechtek HGM. Daß aber der Raum GKL der größte seye unter allen Rechteken, die zwischen geraden Linien eingeschlossen werden können, welche von einem zwischen den Parallelen gelegenen Punkt A an diese Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogen werden, erhellet leicht. Denn, weil KH : KL = AH : AF, so ist das Rechtek GKH : Rechtek GKL = Rchtk GAH : Rechtek GAF; es ist aber GKH > GAH (5, 2. E.), mithin auch GKL > GAF; also GKL das größte unter allen möglichen Rechteken.

Komposition.

Man ziehe aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE an BC die geraden Linien GH, GM unter den gegebenen Winkeln, und es seye der gegebene Raum gleich dem Rechtek N; wenn nun der gegebene Raum N grösser wäre, als der vierte Theil des Rechteks HGM, so würde man den Ort nicht verzeichnen können, weil der gegebene Raum grösser wäre, als der größte, der sich verzeichnen läßt. Es seye mithin der Raum N nicht grösser, als der vierte Theil des Rechteks HGM; und man nehme den Raum O in eben dem

Ver-

Verhältniß zu dem Raum N, welches GH zu GM hat; so ist (1, 6. E.) Rchtk HGM : Qudrt. GH = N : O; und, weil N nicht grösser ist, als der vierte Theil von dem Rechtek von HGM; so ist auch O nicht grösser, als der vierte Theil von dem Quadrat von GH, d. i. O ist nicht grösser, als das Quadrat von GK, welche Linie die Hälfte ist von GH; also kann man über einem Stük von GH ein Rechtek gleich O beschreiben, so, daß seine Ergänzung auf dem andern Stük der Linie GH ein Quadrat wird (28, 6. E.); man thue diß, und, es seyen A, α die Punkte, bis an welche das auf einem Stük von GH beschriebene Rechtek sich erstrekt, so werden die durch diese beyden Punkte mit den beyden Parallelen ebenfalls gleichlauffend gezogenen Linien AP, απ der gesuchte Ort seyn; d. i. wenn man aus irgend einem Punkt A auf einer derselben an BC, DE die geraden Linien AF, AG mit GM, GH gleichlauffend zieht, so wird das Rchtk GAF gleich dem gegebenen Raum N seyn. Denn, weil Rchtk GAF : Rchtk GAH = (AF : AH, d. i. = GM : GH, d. i. nach der Verzeichnung =) N : O; und das Rechtek GAH nach der Verzeichnung gleich ist dem Raum O; so ist das Rechtek GAF gleich N, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 47. b.

2. Fall. Wenn der Punkt A ausserhalb der Parallelen liegt, so erhält man völlig die nemliche Analysis und Komposition vermittelst 85. D. also findet hier keine Bestimmung Statt.

Berechnung.

Fig. 47. a. b.

Für beyde Fälle ist

$$\left.\begin{matrix} AH \\ GA \times AH \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} AF \\ GA \times AF \\ \text{Raum } N \end{matrix}\right. = \text{sin. } AFB : \text{sin. } AGD$$

Nun ist in dem 1sten Fall $AG = GH - AH$, mithin

$$(GH - AH)\, AH = \frac{N.\ \text{sin. } AFB}{\text{sin. } AGD}$$

und $AH = \frac{1}{2} GH \pm \sqrt{\frac{1}{4} GH^2 - \frac{N.\ \text{sin. } AFB}{\text{sin. } AGD}}$

Für den 2ten Fall ist $AG = GH + AH$, mithin

$$AH = -\frac{1}{2} GH \pm \sqrt{\frac{1}{4} GH^2 + \frac{N.\ \text{sin. } AFB}{\text{sin. } AGD}}.$$

33. Saz.

Fig. 48.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Parallelen BC, DE die geraden Linien AF, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind.

Es begegne AG der geraden Linie BC in H, und man errichte auf AH das Perpendikel AK, nehme AK gleich AF, und ziehe die Linien HK, GK. Weil nun das Dreyek AFH der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß von HA zu AF oder AK gegeben, und,

da auch der Winkel HAK gegeben ist; so ist (44. D.) das Dreyek AHK der Gattung nach, also der Winkel AHK, und das Verhältniß von KH zu AH gegeben. Nach der Voraussezung aber ist die Summe der Quadrate van GA und AF, oder von GA und AK gegeben; also ist das Quadrat von GK, und GK selbst der Grösse nach gegeben; es ist aber auch GH der Grösse nach gegeben (35. D.), also das Verhältniß von GH zu GK gegeben; nun ist gezeigt worden, daß der Winkel GHK gegeben seye; also ist das Verhältniß von GH zu HK gegeben (47. D.); nun ist GH gegeben, also auch HK. Und, da gezeigt worden, daß das Verhältniß von KH zu HA gegeben seye; so ist HA der Grösse nach gegeben (2. D.), und, weil auch der Winkel AHC, und die Lage der geraden Linie BC gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Weil aber zur Komposition erfodert wird, daß man aus irgend einem Punkt G auf der geraden Linie DE, die Linie GH unter dem Winkel HGD gleich dem gegebenen Winkel ziehe, und dann die der Grösse nach gegebene Linie GK aus dem gegebenen Punkt G an die der Lage nach gegebene Linie HK ziehe, welches nicht immer möglich ist; so kann der Ort nicht immer verzeichnet werden, so oft nemlich die gerade Linie GK die Seite eines Quadrats, das dem gegebenen Raum gleich ist, kleiner ist, als das aus dem Punkt G auf HK gefällte Perpendikel. Nur eine einzige Auflösung wird möglich seyn, wenn GK gerade gleich ist diesem Perpendikel. Den Raum nun, bey welchem dieses Statt findet, und den Ort in diesem Fall findet man so. Man denke sich die Sache schon geschehen, nemlich, es seye (Fig. 48. a.) der Punkt a auf dem gesuchten Ort, und man ziehe af, aG an BC, DE unter den gegebenen Winkeln, aM gleich af errichte man senkrecht auf aH, und

ziehe

ziehe HM; so muß die von G an M gezogene Linie GM senkrecht auf HM seyn. Es ist also der rechte Winkel GMH gegeben, und, daß der Winkel GHM gegeben seye, beweißt man wie im vorhergehenden; also ist das Dreyek GHM der Gattung nach gegeben, und, da GH gegeben ist; so ist folglich auch GM die Seite eines Quadrats gegeben, das der Summe der Quadrate von Ga und aM gleich ist. Daß aber auch die gerade Linie Ha gegeben seye, wird auf eben die Art, wie im vorhergehenden von HA bewiesen werden.

Komposition in diesem besondern Fall.

Man ziehe aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen, die geraden Linien GH, GL unter den gegebenen Winkeln, und GN gleich GL senkrecht auf GH; auf die hierauf gezogene Linie HN fälle man das Perpendikel GM; so wird das Quadrat von GM der gesuchte Raum seyn. Auf GH fälle man das Perpendikel Ma; so wird die gerade durch a mit BC gleichlauffend gezogene Linie aa der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe an BC, die Linie af gleichlauffend mit GL. Und, weil GL : af = (GH : aH =) GN : aM, und GL = GN; so ist auch af gleich aM. Also ist die Summe der Quadrate von Ga und af gleich (der Summe der Quadrate von Ga und aM, d. i. gleich) dem Quadrat von GM.

Es erhellet aber leicht, daß das Quadrat von GM kleiner seye, als der Raum, der gleich ist der Summe der Quadrate von geraden Linien AF, AG, welche aus irgend einem nicht auf der Linie aa liegenden Punkt an die der Lage nach gegebenen geraden Linien BC, DE unter den gegebenen Winkeln gezogen werden. Denn, man ziehe an HM die Linie AK gleichlauffend mit GN; so ist, wie von den geraden Linien af, aM bewiesen

wor-

worden, auch AK gleich AF; also die Summe der Quadrate von AG und AF gleich dem Quadrat von GK. Es ist aber GM kleiner als GK, mithin das Quadrat von GM der kleinste mögliche Raum. Weiter weiß man, daß die Summe der Quadrate von den geraden Linien, die aus einem Punkt A gezogen sind, der näher bey aa liegt, immer kleiner seyn werde, als die Summe der Quadrate von geraden Linien, die aus einem von aa entferntern Punkt gezogen werden; weil nemlich die gerade Linie GK kleiner ist als jede gerade Linie, die aus dem Punkt G an HN in grösserer Entfernung von dem Perpendikel GM gezogen wird. Diß vorausgesezt ist

Ueberhaupt für den ersten Fall folgendes die Komposition.

Aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen DE ziehe man an die andere BC die geraden Linien GH, GL unter den gegebenen Winkeln, und errichte aus dem Punkt G GN gleich GL senkrecht auf GH; auf die alsdann gezogene Linie HN fälle man das Perpendikel GM. Ist nun der gegebene Raum gleich dem Quadrat von GM, so findet man den Ort, wie vorhin gezeigt worden. Ist er nicht gleich dem Quadrat von GM; so muß er nothwendig grösser seyn, weil gezeigt worden, daß das Quadrat von GM der kleinste mögliche Raum seye. Es seye also der gegebene Raum gleich dem Quadrat von GO, einer Linie, die mithin grösser ist als GM, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GO einen Kreis, der nothwendig die gerade Linie HN in zwey Punkten K, k schneiden wird. Aus jedem dieser Punkte fälle man auf GH ein Perpendikel KA, und ziehe durch den Punkt A die Linie

Linie AA mit BC gleichlauffend; so wird AA der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe AF mit GL gleichlauffend; und, weil wegen der Parallelen GL : AF = (GH : AH, d. i. =) GN : AK, und nach der Verzeichnung GL = GN; so ist auch AF = AK. Also ist die Summe der Quadrate von GA und AF gleich (der Summe der Quadrate von GA und AK, d. i. gleich dem Quadrat von GK, d. i. gleich) dem Quadrat von GO, d. i. gleich dem gegebenen Raum. Auf ähnliche Art findet man noch einen andern Ort vermittelst des Punkts k, wenn man nemlich kα senkrecht auf GH, und $\alpha\alpha$ gleichlauffend mit BC zieht.

In welchen Fällen aber einer oder beyde Oerter zwischen oder ausserhalb der Parallelen fallen, kann man leicht so unterscheiden. Es seye unter den geraden Linien GH, GL, die Linie GH diejenige, die nicht kleiner ist, als die andere. Ist nun (Fig. 48. a.) der gegebene Raum kleiner, als das Quadrat von GL, das heißt, ist GO kleiner als GL; so ist offenbahr, daß die Punkte K, k zwischen die Punkte H, N fallen. Denn die Punkte H, N liegen ausserhalb des Kreises, weil GO kleiner als GL, d. i. kleiner als GN ist; der Punkt M aber, der, weil der Winkel HGN ein rechter ist, zwischen die Punkte H, N fällt, liegt innerhalb des Kreises; also fallen die Punkte K, k zwischen die Punkte H, N. Folglich fallen in diesem Fall die Punkte A, a zwischen die Punkte G, H, d. i. beyde Oerter fallen zwischen die Parallelen. Ist hingegen GO zwar grösser als GN, oder GL, aber kleiner, als GH (Fig. 48. b.), so fällt der Punkt K wie vorhin zwischen die Punkte H, N; der Punkt k aber fällt auf die Verlängerung von HN, denn der Punkt N liegt innerhalb des Kreises. Also in diesem Fall liegt A zwischen den Punkten G, H, aber α auf der Verlängerung von HG auf der Seite von G. Wäre GO grösser als GH, (Fig. 48. c.) folg-

folglich auch grösser als GL oder GN; so fiele der Punkt K auf die Verlängerung von HN nach der Seite von H hin, der Punkt k aber auf die Verlängerung von HN nach N hin; also läge A auf der Verlängerung von GH nach H, *a* auf der Verlängerung von GH nach G hin, d. i. beyde Oerter fielen ausserhalb der Parallelen. Endlich, wenn GO gleich ist GL oder GN, (Fig. 48. d.) so geht der Kreis durch den Punkt N, der also mit dem Punkt k zusammen fällt, und, da NG senkrecht ist auf GH; so ist die Linie DGE selbst einer von den Oertern, und der andere fällt zwischen die Parallelen.

Der kleinste mögliche Raum aber, das heißt, das Quadrat von GM wird so bestimmt. Wegen der rechtwinklichten Dreyeke HGN, HMG ist (8, 6. E.) HN : NG = GH : GM, folglich sind auch (22, 6. E.) die auf diesen Linien beschriebenen Quadrate proportional, d. i. das Quadrat von GM ist die vierte Proportional-Grösse zu der Summe der Quadrate von GH und GL, dem Quadrat von GL, und dem Quadrat von GH.

Fig. 48. e.

2. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind.

Es begegne AG der geraden Linie BC in H, und es seye das Quadrat von GK gleich der über GA beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figur; so hat folglich (53. D.) das Quadrat von GK ein gegebenes Verhältniß zu dem Quadrat von GA; mithin ist auch das Verhältniß von GK zu GA gegeben (2. Zus. 20, 6. E. und 13. D. oder 59. D.). Man errichte KL senkrecht auf GK, und nehme den Punkt L so, daß das Quadrat von KL gleich wird der über AF beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figur; so wird eben so gezeigt werden,

den, daß das Verhältniß von KL zu AF gegeben seye. Man nehme GM zu GH in eben dem Verhältniß, das GK zu GA hat; so hat auch noch (12, 5. E. oder 19, 5. E.) KM zu AH das nemliche Verhältniß; also ist das Verhältniß von KM zu AH und von GM zu GH gegeben. Es ist aber GH der Grösse nach gegeben (35. D.), mithin auch GM. Man ziehe GL und LM, weil nun das Verhältniß von KM zu AH, und von AH zu AF, und von AF zu KL gegeben ist; so ist (9. D.) auch das Verhältniß von KM zu KL gegeben; nun ist auch noch der Winkel MKL gegeben, mithin ist (44. D.) auch der Winkel KML, und das Verhältniß von ML zu MK gegeben.

Nach der Voraussezung aber ist die Summe der über AG, AF beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren, d. i. die Summe der Quadrate von GK und KL gegeben, folglich ist das Quadrat von GL, also GL selbst der Grösse nach gegeben, also hat GL zu GM ein gegebenes Verhältniß. Nun ist der Winkel GML, mithin (47. D.) das Dreyek GML der Gattung nach, also das Verhältniß von LM zu MG gegeben; es ist aber MG gegeben, also auch LM. Es ist aber gezeigt worden, daß das Verhältniß von LM zu MK und von MK zu AH gegeben seye; mithin ist auch (9. D.) das Verhältniß von LM zu AH gegeben; und, weil LM der Grösse nach gegeben ist; so ist auch AH der Grösse nach gegeben. Es ist aber auch der Winkel AHC, und die Lage der Linie BC gegeben. Also berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt G auf einer der Parallelen DE ziehe man an die andere BC die geraden Linien GH,

GH, GN unter den gegebenen Winkeln, und denke sich über denselben Figuren beschrieben ähnlich denjenigen, welche über den Linien AG, AF, die man an BC, DE ziehen soll, beschrieben werden sollen. Auf GH nehme man die Linie GM (die man nach 14, 2. E. finden kann), so, daß das Quadrat von GM gleich seye der über GH zu beschreibenden Figur. Man errichte GO senkrecht auf GH, und nehme darauf den Punkt O ebenfalls so, daß das Quadrat über GO gleich seye der über GN zu beschreibenden Figur, und ziehe MO. Und es seye der gegebene Raum, dem die Summe der über AG, AF zu beschreibenden Figuren gleich seyn soll, gleich dem Quadrat von GP. Es erhellet aber auf eben die Art, wie beym vorigen Fall bey einer ähnlichen Veranlassung bewiesen worden, daß GP nicht kleiner seyn dürfe, als die Linie GQ, die von dem Punkt G senkrecht auf MO gezogen wird. Man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GP einen Kreis, welcher der geraden Linie MO in einem oder zwey Punkten begegnen wird, einer dieser Punkte seye L, und man fälle aus L auf GM das Perpendikel LK. Nun nehme man GK zu GA im nemlichen Verhältniß, welches GM zu GH hat, (es wird also auch KM zu AH eben dieses Verhältniß haben), und durch A ziehe man AR mit BC gleichlauffend, so wird AR der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe AF gleichlauffend mit GN; so ist, weil wegen der Parallelen GO : GM = KL : KM
und, nach der Verzeichnung GM : GH = KM : AH
und, wegen der Parallelen GH : GN = AH : AF,

gleichförmig (ex aequo) GO : GN = KL : AF,
und verwechselt GO : KL = GN : AF; also ist (22, 6. E.) das Quadrat von GO zu dem Quadrat von KL, wie die über GN beschriebene Figur, zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden Figur über AF. Es ist aber nach

der Verzeichnung das Quadrat von GO gleich der Figur über GN, mithin ist auch das Quadrat über KL gleich der Figur über AF. Und, weil nach der Verzeichnung GM : GH = GK : GA, so ist verwechselt auch GM : GK = GH : GA. Also ist (22, 6. E.) das Quadrat von GM zum Quadrat von GK, wie die über GH beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden über GA beschriebenen Figur. Es ist aber das Quadrat von GM gleich der über GH beschriebenen Figur; also ist auch das Quadrat von GK gleich der über GA beschriebenen Figur. Folglich ist die Summe der über GA und AF beschriebenen Figuren gleich der Summe der Quadrate über GK und KL, d. i. gleich dem Quadrat von GL, oder GP, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Der kleinste mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von GQ wird, wie beym vorhergehenden Fall bestimmt. Denn es ist MO : GO = GM : GQ, also sind auch die Quadrate dieser Linien proportional; d. i. das Quadrat von GQ ist die vierte Proportional-Grösse zu der Summe der Quadrate von GM und GO, zu dem Quadrat von GO, und zu dem Quadrat von GM; oder, welches das nemliche ist, das Quadrat von GQ ist die vierte Proportional-Grösse zu der Summe der über GN, GH beschriebenen Figuren, zu der über GN, und zu der über GH beschriebenen Figur.

Berechnung.

Fig. 48. a—d.

1. Fall. Es ist AF : AH = sin. AGD : sin. AFB

folglich $AF = \frac{AH.\ \sin.\ AGD}{\sin.\ AFB}$.

Ferner

Ferner ist $\overline{AF}^2 + \overline{AG}^2 = \overline{GK}^2$. Man substituire für AF seinen eben angezeigten Werth, und AG drüke man durch HG und AH aus; so erhält man eine quadratische Gleichung, in welcher AH allein unbekannt ist, und man kann folglich durch Auflösung dieser Gleichung AH finden. Weil man aber auf diese Art AH durch eine Formel erhält, die zu der wirklichen Rechnung nicht sehr bequem ist; so wird es besser seyn, so zu verfahren. Es ist

$$\text{cotang. GHK} : \text{sin.tot.} = \text{GH} : \begin{cases} \text{GN} \\ \text{GL} \end{cases} = \text{sin. AFB} : \text{sin. AGD}.$$

Hierdurch findet man den Winkel GHK. Da nun in dem Dreyek GHK noch weiter die Seiten GH, GK gegeben sind; so berechne man die 3te Seite HK, für welche man 2 Werthe HK und Hk finden wird. Endlich hat man

$$\text{AH} : \begin{cases} \text{HK} \\ \text{Hk} \end{cases} = \text{cosin. GHK} : \text{sin. tot.}$$

Fig. 48. e.

2. Fall. Man kennt in dem rechtwinklichten Dreyek MGO die Linien MG, GO, weil MG^2 der Figur über GH, und OG^2 der Figur über GN gleich ist; folglich findet man den Winkel GMO durch die Formel: cotang. GMO : sin. tot. = GM : GO. Ausser diesem Winkel GMO kennt man in dem Dreyek GML noch die Seiten GM, GL, folglich findet man leicht ML oder Ml, und hieraus leitet man ferner in dem rechtwinklichten Dreyek MLK, in welchem man alle Winkel kennt, MK her, und findet endlich

$$\text{AH} = \frac{\text{MK. GH}}{\text{GM}}.$$

34. Saz.

Fig. 49.

Wenn aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Parallel-Linien BC, DE die geraden Linien AF, AG unter gegebenen Winkeln AFB, AGD gezogen werden, und der Unterschied der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

1. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen geraden Linien Quadrate sind.

Es seye AG diejenige von den gezogenen Linien, die grösser ist, als die andere AF, und, weil nach der Voraussezung das Quadrat von AG gleich ist der Summe des Quadrats von AF, und eines gegebenen Raums; so ist, wenn man FH senkrecht auf AF zieht, und auf FH die Linie FK so abschneidet, daß das Quadrat von FK gleich ist dem gegebenen Raum, und nach AK zieht, AK gleich AG (47, 1. E.). Es begegne AF der Linie DE in L; so ist FL der Grösse nach gegeben (35. D.), es ist aber auch die Grösse von FK und der Winkel LFK gegeben; mithin ist, die Linie LK gezogen, das Dreyek FKL der Gattung und Grösse nach gegeben (44. und 56. D.), also ist der Winkel ALK gegeben; und, weil das Dreyek ALG der Gattung nach gegeben ist, so ist das Verhältniß von AL zu AG, d. i. das Verhältniß von AL zu AK gegeben. Mithin ist (47. D.) das Dreyek ALK der Gattung nach gegeben, aber auch der Grösse nach, weil LK der Grösse nach gegeben ist; also ist AL der Grösse nach gegeben, und, da auch der Winkel ALD, und die Lage der Linie DL gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Die

geschiehet vermittelst der Komposition des 47sten Sazes der Data. Aus irgend einem Punkt F auf der geraden Linie BC ziehe man an DE die Linien FL, FM unter den gegebenen Winkeln, und es seye FM diejenige Linie, die mit DE den Winkel FMD einschließt, der gleich ist dem Winkel, den die aus A an DE zu ziehende Linie mit DE einschliessen soll. Es ist also das Verhältniß von FL zu FM das gegebene Verhältniß, welches, wie in der Analyse gesagt worden, AL zu AG oder AK hat; nun seye weiter das Quadrat von FK gleich dem gegebenen Raum, und man ziehe FK senkrecht auf FL; weil nun AK aus dem Punkt K an FL so gezogen werden muß, daß AK zu AL in dem besagten Verhältniß steht; so wird diß geschehen, wenn man aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FM einen Kreis beschreibt, welcher der noch vorher gezogenen Linie LK in den Punkten N, n begegne, und dann die Linien FN oder Fn, und mit einer von diesen KA, oder Ka gleichlauffend zieht. Weil aber dieser Kreis der geraden Linie KL nicht immer begegnen kann; so wird sich auch der Ort nicht immer verzeichnen lassen. Man sieht aber leicht, daß, wenn entweder der Punkt L, oder der Punkt K innerhalb des Kreises liegt, d. i. wenn die gerade Linie FM grösser ist, als die Linien FL, FK, oder auch nur grösser ist als eine derselben, daß alsdann die gerade Linie LK dem Kreis nothwendig in zwey Punkten begegne: in diesen Fällen also wird der Ort immer verzeichnet werden können. Ist aber FM kleiner, als jede der Linien FL, FK, in welchem Fall also die Punkte L, K ausserhalb des Kreises liegen müssen; so kann die gerade Linie LK den Kreis entweder schneiden, oder berühren, oder ausserhalb desselben fallen. Berührt LK den Kreis; so wird nur eine einige gerade Linie der Auf-

 gabe

gabe Genüge thun. Und, den Raum, dem in diesem Fall der Unterschied der Quadrate von AG und AF gleich seyn muß, zu finden, ziehe man aus dem Punkt L die gerade Linie LO, die den Kreis in O berühre, und es begegne LO der Linie FK in P; so wird das Quadrat von FP der gesuchte Raum seyn. Zieht man weiter aus dem Punkt P an FL die gerade Linie PQ mit der noch vorher gezogenen FO gleichlauffend, und durch den Punkt Q die Linie QR gleichlauffend mit BC; so wird QR in diesem Fall der gesuchte Ort seyn. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt Q auf derselben die geraden Linien QS, QF an die Parallelen DE, BC unter den gegebenen Winkeln; so ist der Unterschied der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich dem Quadrat von FP. Denn, wegen der Parallelen ist QS: $\left\{\begin{matrix}FM\\FO\end{matrix}\right.$ = (QL : FL, d. i. =) QP : FO. Also ist QS = QP. Folglich auch der Unterschied der Quadrate von QS und QF gleich dem Unterschied der Quadrate von QP und QF, d. i. gleich dem Quadrat von FP. Nun muß untersucht werden, ob dieser Raum, nemlich das Quadrat von FP grösser oder kleiner seye, als der Unterschied der Quadrate von denjenigen Linien, die aus irgend einem andern ausserhalb der Linie QR gelegenen Punkt an BC, DE mit FL, FM gleichlauffend gezogen werden. Es seye A irgend ein Punkt dieser Art, und man ziehe AF, AG mit FL, FM, und an LP ziehe man AT mit QP, also auch mit FO gleichlauffend, endlich ziehe man AP. Weil nun AG: $\left\{\begin{matrix}FM\\FO\end{matrix}\right.$ = (AL : FL, d. i. =) AT : FO; so ist AT = AG. Es ist aber, weil der Winkel ATP ein rechter ist, AP > AT; also ist der Unterschied der Quadrate über den Linien AP, AF, d. i. der Unterschied der Quadrate über den Linien QP, QF (nemlich das Quadrat von FP) grösser als der

Unter-

Unterschied der Quadrate über AG, AF. Also der Raum, welchem der Unterschied der Linien QS, QF gleich ist, die aus einem auf dem Ort QR gelegenen Punkt gezogen werden, der größte mögliche.

Ferner wird der Unterschied der Quadrate über geraden Linien, welche aus näher in QR gelegenen Punkten gezogen werden, grösser seyn, als der Unterschied der Quadrate über geraden Linien, welche aus entferntern Punkten gezogen sind. Es seye auf der Linie FQ der Punkt a näher bey QR, als der Punkt A, und man ziehe AG, ag gleichlauffend mit FM, und AT, at gleichlauffend mit PQ. Es ist also, wie gezeigt worden, AG = AT, und so auch ag = at, man ziehe noch AP, aP; so muß also jezt der Unterschied der Quadrate über AG, AF, d. i. über AT, AF verglichen werden mit dem Unterschied der Quadrate über ag, aF, d. i. über at, aF. Weil nun die rechtwinklichten Dreyeke AFP, ATP über der gemeinschaftlichen Grundlinie AP stehen; so ist der Unterschied der Quadrate über AT, AF gleich dem Unterschied der Quadrate über PF, PT. Und auf ähnliche Art ist, weil die rechtwinklichten Dreyeke aFP, atP über einerley Grundlinien aP stehen, der Unterschied der Quadrate über at, aF gleich dem Unterschied der Quadrate über PF, Pt. Also müssen jezt die geraden Linien PT, Pt mit einander verglichen werden. Es ist aber PT > Pt, weil nach der Voraussezung AQ > aQ. Also ist der Unterschied der Quadrate über PF, Pt grösser, als der Unterschied der Quadrate über PF, PT, und, wenn wir jezt die vorigen Schlüsse wieder rükwärts verfolgen; so wird bewiesen, daß der Unterschied der Quadrate über ag, aF grösser seye, als der Unterschied der Quadrate über AG, AF. Diß voraus geschikt wird nun die Komposition so fortgesezt.

Man ziehe, wie schon gesagt worden, die Linien FL, FM, FK, LK, wo FK die Seite eines Quadrats

ist, das gleich ist dem gegebenen Raum, beschreibe aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FM einen Kreis, und ziehe aus L die Berührungs-Linie LO; begegnet nun LK dem Kreis nicht; so kann der Ort nicht verzeichnet werden; berührt LK den Kreis, so wird der Ort verzeichnet, wie im vorhergehenden gezeigt worden. Schneidet endlich LK den Kreis in zwey Punkten N, n; so ziehe man durch jeden derselben z. B. durch N eine gerade Linie an den Punkt F, und durch K eine mit NF gleichlauffende Linie KA, die der Linie FL in dem Punkt A begegne, endlich durch A die Linie AV gleichlauffend mit BC; so ist AV der gesuchte Ort. Denn, man ziehe aus irgend einem Punkt A auf derselben die Linien AG, AF gleichlauffend mit FM, FL; weil nun $AG : \left\{\begin{matrix} FM \\ FN \end{matrix}\right. = (AL : FL,$ d. i. $=)\ AK : FN$; so ist $AG = AK$. Also ist der Unterschied der Quadrate über AG, AF gleich dem Unterschiede der Quadrate über AK, AF, d. i. gleich dem Quadrat über FK, oder dem gegebenen Raum.

Der größte mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von FD wird so bestimmt. Man ziehe FO; so ist wegen der gleichwinklichten Dreyeke OLF, OFP (8, 6. E.) OL : LF = OF : FP, also sind auch die Quadrate dieser Linien proportional, das heißt, der größte mögliche Raum, oder das Quadrat von FP ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Quadrat von OL, d. i. zu dem Ueberschuß des Quadrats von FL über das Quadrat von OF oder FM, zu dem Quadrat von LF, und zu dem Quadrat von FM.

Die Fälle aber, in welchen der Ort AV entweder zwischen die Parallelen BC, DE, oder ausserhalb derselben, und zwar entweder auf die Seite von BC, oder von DE fällt, können so unterschieden werden.

1. Es seye FM kleiner, als jede der Linien FL, FK. Man ziehe LO, die den Kreis in O berühre, und diese Linie LO begegne der Linie FK in dem Punkt P; nun ist, wie bey der Bestimmung gezeigt worden, FK nie grösser, als FP, mithin wird, wenn man noch die Linie LK zieht, diese entweder mit LP zusammen fallen, oder den Kreis in zwey Punkten N, n schneiden. In beyden Fällen aber sieht man leicht, daß bey dem ersten Fall die gerade Linie PQ, die mit OF gleichlauffend ist, oder bey dem 2ten Fall die Linien KA, Ka, die mit NF, nF gleichlauffend sind, der verlängerten Linie LF auf der Seite von F begegne. In diesem Fall also wird der Ort QR, oder AV, av immer ausserhalb der Parallelen fallen. Ist aber FM gleich FL, aber kleiner, als FK; so wird der Punkt L mit dem Punkt n zusammen fallen, also wird die gerade Linie, die durch den Punkt K mit nF, d. i. LF gleichlauffend gezogen wird, der Linie LF nie begegnen, und AV wird der einzige Ort seyn. Ist FM gleich FK, aber kleiner, als FL; so wird der Punkt K mit dem Punkt N zusammen fallen, also wird der Punkt A auf den Punkt F fallen, und BC selbst wird der eine von den Oertern seyn.

Fig. 49. b.

2. Es seye FM kleiner als FL, aber grösser als FK; so wird folglich der Punkt L ausserhalb und der Punkt K innerhalb des Kreises fallen, und, weil der Punkt K auf der Seite LN des Dreyeks FLN liegt; so wird der Punkt A auf der Seite LF liegen, also der Ort zwischen die Parallelen fallen. Und, weil eben dieser Punkt K auf der über nF hinaus verlängerten Seite Ln des Dreyeks FLn liegt; so wird der Punkt a auf der nach F hin verlängerten Seite LF liegen, mithin

hin dieser 2te Ort ausserhalb der Parallelen auf der Seite von BC liegen. *)

Fig. 49. c.

3. Es seye FM grösser als FL, aber kleiner als FK; so wird folglich der Punkt L innerhalb, der Punkt K aber ausserhalb des Kreises fallen. Weil nun der Punkt K auf der über FN hinaus verlängerten Seite LN des Dreyeks FLN liegt; so wird der Punkt A auf der nach F hin verlängerten Seite LF eben dieses Dreyeks liegen, mithin der Ort ausserhalb der Parallelen auf der Seite von BC seyn. Und, weil eben dieser Punkt K auf der über L hinaus verlängerten Seite Ln des Dreyeks FLn liegt; so wird der Punkt a auf den nach L hin verlängerten Seite LF eben dieses Dreyeks liegen, mithin dieser 2te Ort ausserhalb der Parallelen auf der Seite von DE seyn.

Fig. 49. d.

4. Ist FM grösser, als jede der Linien FL, FK; so werden folglich die Punkte L, K innerhalb des Kreises liegen; und, weil der Punkt K auf der Seite LN des Dreyeks FLN liegt; so wird der Punkt A auf der Seite FL liegen, mithin der Ort innerhalb der Parallelen liegen. Weil aber eben dieser Punkt K auf der über L hinaus verlängerten Seite nL des Dreyeks FLn liegt; so wird der Punkt a auf der über L hinaus verlängerten Seite FL eben dieses Dreyeks liegen, mithin der Ort ausserhalb der Parallelen auf der Seite von DE seyn.

*) Was hier, und bey 3. noch von den Fällen gesagt wird, wenn entweder FM = FK aber zugleich FM < FL; oder FM = FL, aber zugleich FM < FK, bliebe, da es schon bey 1. bemerkt ist, in der Uebersezung weg.

seyn. Ist aber FM gleich FL; so fällt der Punkt L mit dem Punkt n zusammen, also wird eine durch K mit nF, d. i. LF gleichlauffend gezogene Linie dieser niemahls begegnen, folglich die gerade Linie AV der einzige Ort seyn.

Fig. 49. e.

2ter Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind. Es seye AG diejenige von den gezogenen Linien, über welche die grössere Figur beschrieben ist, und das Quadrat von FH seye gleich der Figur über AF. Aus dem Punkt F ziehe man eine gerade auf AF senkrechte Linie, nehme darauf FK gleich der Seite eines Quadrats, das so groß ist, als der gegebene Raum, und ziehe HK. Weil nun nach der Voraussezung die Figur über AG gleich ist der Summe der Figur über AF und des Quadrats über FK, d. h. gleich ist der Summe der Quadrate von HF, FK; so ist die Figur über AG gleich dem Quadrat über HK. Also ist (53. D.) auf eben die Art, wie beym 2ten Fall des vorhergehenden Sazes gezeigt worden, das Verhältniß von AG zu HK, und so auch das Verhältniß von AF zu HF gegeben. Nun begegne FA der Linie DE in dem Punkt L, und man nehme FM : FL = FH : FA; so ist folglich auch HM : AL = FH : FA, mithin das Verhältniß von HM zu AL, und von FM zu FL gegeben. Nun ist FL der Grösse nach gegeben (35. D.), also auch FM. Und, weil das Verhältniß von HM zu AL, und von AL zu AG, und von AG zu HK gegeben ist; so ist auch das Verhältniß von HM zu HK gegeben (9. D.). Und, weil MF, FK der Grösse nach, und noch der Winkel MFK gegeben ist; so ist (44. D.) das Dreyek MFK der Grösse und Gattung nach gegeben, also der Winkel HMK gegeben, und, da

da gezeigt worden, daß das Verhältniß von HM zu HK gegeben seye; so ist das Dreyek MHK der Gattung nach gegeben (47. D.), also das Verhältniß von MK zu MH gegeben. Nun ist schon gezeigt worden, daß das Verhältniß von MH zu AL gegeben seye; also ist das Verhältniß von MK zu AL gegeben (9. D.), und weil MK der Grösse nach gegeben ist; so ist es auch AL. Da überdiß der Winkel ALE, und die Lage von DE gegeben ist; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 2ccsten Saz.

Komposition.

Aus irgend einem Punkt F auf einer der Parallelen BC ziehe man an die andere DE die geraden Linien FL, FN unter den gegebenen Winkeln, und denke sich über denselben Figuren beschrieben ähnlich denjenigen, welche über den an die Parallelen BC, DE zu ziehenden Linien AF, AG beschrieben werden sollen. Auf FL nehme man den Punkt M so, daß das Quadrat von FM gleich seye der Figur über FL, und auf FN den Punkt O, so, daß das Quadrat von FO gleich seye der Figur über FN. Senkrecht auf FL ziehe man FK die Seite des Quadrats, das so groß ist, als der gegebene Raum, dem der Unterschied der Figuren AG, AF gleich seyn soll, und durch die Punkte M, K ziehe man MK. Aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FO beschreibe man einen Kreis, welcher der Linie MK in einem oder zwey Punkten begegne (denn FK darf nicht grösser seyn, als die Linie FQ, die zwischen dem Punkt F, und der Linie MQ, die den Kreis berührt, abgeschnitten wird), der eine von den Punkten, in welchen MK den Kreis schneidet, seye P, man ziehe PF, und mit PF gleichlaufend die Linie KH, die der Linie FL in dem Punkt H begegne. Nun nehme man AF : HF = FL : FM; so ist

ist auch AL : HM = FL : FM, durch den Punkt A ziehe man AR gleichlauffend mit BC; so ist AR der gesuchte Ort. Denn, man ziehe AG gleichlauffend mit FN; weil nun FP : FM = HK : HM
und FM : FL = HM : AL
und FL : FN = AL : AG

so ist gleichförmig (ex aequo) FP : FN = HK : AG, und, verwechselt $\left.\begin{matrix}FP\\FO\end{matrix}\right\}$: HK = FN : AG. Also ist (22, 6. E.) das Quadrat von FO zu dem Quadrat von HK in eben dem Verhältniß, welches die über FN beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden über AG beschriebenen Figur hat. Nach der Verzeichnung aber ist das Quadrat über FO gleich der Figur über FN; mithin ist das Quadrat über HK gleich der Figur über AG. Und, weil nach der Verzeichnung FM : FL = FH : FA; so ist verwechselt FM : FH = FL : FA. Also verhält sich (22, 6. E.) das Quadrat von FM zu dem Quadrat von FH, wie die über FL beschriebene Figur zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden Figur über FA. Es ist aber nach der Verzeichnung das Quadrat von FM gleich der Figur über FL; mithin ist das Quadrat über FH gleich der Figur über FA. Also ist der Ueberschuß der Figur auf AG über die Figur auf AF gleich dem Ueberschuß des Quadrats von HK über das Quadrat von FH, d. i. gleich dem Quadrat von FK, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Der größte mögliche Raum aber, nemlich das Quadrat von FQ, wird auf eben die Art bestimmt, wie beym vorhergehenden Fall. Denn, es berühre MQ den Kreis in S, und man ziehe FS; so verhält sich (8, und 22, 6. E.) das Quadrat von SM zu dem Quadrat von MF wie das Quadrat von SF zu dem Quadrat von FQ. Das heißt, der größte mögliche Raum, oder, das Quadrat

Quadrat von FQ ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Ueberschuß des Quadrats von MF über das Quadrat von FS oder FO zu dem Quadrat von MF und zu dem Quadrat von FO, oder welches das nemliche ist, das Quadrat von FQ ist die vierte Proportional-Grösse zu dem Ueberschuß der Figur über FL, über die Figur über FN, zu der Figur über FL, und zu der Figur über FN.

Schooten beweißt den 2ten Fall in diesem und in dem vorhergehenden Saz nicht; er glaubt aber, in beyden werde sich der 2te Fall vermittelst des 59sten Sazes der Data auflösen lassen, worinn er sich aber wirklich irrte, denn es wird hier gar nicht voraus gesezt, daß die der Gattung nach gegebenen Figuren ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Berechnung.

Fig. 49. a—d.

1. Fall. Die Berechnung dieses Sazes wird überhaupt mit der des vorigen ähnlich. Man kann entweder FA durch eine ähnliche Formel, wie dort AH bestimmen, oder auch in dem rechtwinklichten Dreyek KFL, in welchem man die beyden Seiten LF, FK kennt, den Winkel bey L, aus diesem Winkel, und den Seiten LF, FN in dem Dreyek LFN den Winkel LFN, d. i. den Winkeln LAK, und endlich aus diesem Winkel und der Seite FK in dem rechtwinklichten Dreyek FKA die Seite FA berechnen.

Fig. 49. e.

2. Fall. In dem rechtwinklichten Dreyek MFK kennt man MF, weil $\overline{MF}^2$ gleich ist der Figur über FL, und

und FK, weil $\overline{FK}^2$ gleich ist dem gegebenen Raum, folglich findet man leicht den Winkel FMK. Da man nun ausser diesem Winkel in dem Dreyek FMP noch die Seiten FM, FP (weil $\overline{FP}^2$ der Figur über FN gleich ist) kennt; so findet man den Winkel MFP, d. h. den Winkel MHK, man weiß folglich auch seinen Nebenwinkel FHK, und vermittelst dieses und der Seite FK findet man in dem rechtwinklichten Dreyek FHK die Seite FH. Endlich ist $AF = \frac{HF. FL}{FM}$.

Zweytes Buch.

1. Lehnsaz.

Dieser Lehnsaz ist bey Pappus der 120ste Saz des 7ten Buchs, und heißt bey ihm Lehnsaz zum 2ten Ort.

Fig. 50.

Wenn in einem Dreyek ABC das Perpendikel AD gefällt wird; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem Unterschied der Quadrate über BD, DC. Und, wenn man BC in dem Punkt E in zwey gleiche Theile theilt; so ist der Unterschied der Quadrate über BA, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED.

Der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC ist (47, 1. E.) gleich dem Ueberschuß der Summe der Quadrate von AD und BD über die Summe der Quadrate von AD und DC, und, das gemeinschaftliche Quadrat über AD hinweg genommen, ist der Ueberschuß des Quadrats von AB über das Quadrat von AC gleich dem Ueberschuß des Quadrats von BD über das Quadrat von DC, und diß war das erste. Und, weil BE gleich ist EC; so ist BD gleich der Summe von CE und ED; es ist aber (8, 2. E.) der Ueberschuß des Quadrats von CE und ED als einer Linie über das Quadrat von CD gleich dem vierfachen Rchtk CED, d. i. gleich

gleich dem doppelten Rchtk BC×ED. Also ist der Unterschied der Quadrate über BD, CD, oder der Unterschied der Quadrate über AB, AC gleich dem doppelten Rchtk BC×ED, und diß war das zweyte.

1. Saz.

Die ersten sieben Säze des 2ten Buchs folgen in eben der Ordnung, wie sie bey Pappus vorkommen.

Fig. 51. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Unterschied der Quadrate über den gezogenen Linien AC, BC gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt C, in dem sie zusammen stossen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, fälle auf dieselbe das Perpendikel CD, und theile AB in E in zwey gleiche Theile; so ist nach dem vorhergehenden Lehnsaz der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk AB×ED. Nun ist nach der Voraussezung der Unterschied der Quadrate über AC, BC gegeben; also ist das doppelte Rchtk AB×ED, mithin das Rchtk AB×ED selbst gegeben; es ist aber AB der Lage und Grösse nach gegeben; folglich ist ED der Grösse nach gegeben; es ist ferner der Punkt E gegeben, folglich auch (30. D.) der Punkt D; und, weil noch der rechte Winkel ADC, und die Lage der Linie AD gegeben ist; so ist DC der Lage nach gegeben (32. D.); also berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Es seye der gegebene Unterschied der Quadrate gleich dem Raum F, und der Punkt A seye derjenige,

aus dem die grössere Linie an C gezogen werden soll; man theile AB in dem Punkt E in zwey gleiche Theile, und trage aus E nach B hin die gerade Linie ED, deren Grösse man so bestimmt, daß das doppelte Rchtk ED × AB gleich wird dem gegebenen Raum F, aus D errichte man auf AD das Perpendikel DG; so wird DG der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C auf der Linie DG die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Unterschied der über denselben beschriebenen Quadrate gleich seyn dem gegebenen Raum F. Denn nach dem Lehnsaz ist der Unterschied der Quadrate von AC, BC gleich dem doppelten Rchtk AB × ED, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum F. Wenn der gegebene Raum F kleiner ist, als das Quadrat über AB, d. h. kleiner ist, als das vierfache Quadrat über der Hälfte von AB oder über EB; so ist das Rchtk BED viermahl genommen kleiner als das Quadrat über EB viermahl genommen; also ED kleiner als EB, mithin fällt der Punkt D zwischen E, B; ist F gleich dem Quadrat über AB; so fallen die Punkte D, B zusammen; ist F grösser, als das Quadrat von AB; so fällt, wie man leicht sieht, D auf die Verlängerung von EB.

Fig. 51. c.

Schootens Verzeichnung, die darinn besteht, daß man das Rchtk BAH gleich dem gegebenen Raum macht, und dann HB in D in zwey gleiche Theile theilt, ist der Sache selbst nach mit der vorhergehenden einerley; denn, weil AH doppelt so groß ist als ED; so ist das doppelte Rchtk AB × ED gleich dem Rchtk AB × AH, d. i. dem gegebenen Raum. Aber dem Lehnsaz des Pappus zufolge scheint Apollonius die vorhergehende Auflösung gegeben zu haben.

2. Lehn-

2. Lehnsaz.

Ist bey Pappus der 19te Saz des 7ten Buchs, und heißt dort Lehnsaz zum ersten Ort des 2ten Buchs.

Fig. 52.

Wenn aus dem Scheitel A eines Dreyeks ABC die Linie AD an die Grundlinie so gezogen wird, daß BD sich zu DC verhält, wie das Quadrat über AB zu dem Quadrat über AC; so ist das Rchtk BD×DC gleich dem Quadrat über AD.

Man ziehe durch C die Linie CE mit AB gleichlauffend; so ist folglich BD: DC = AB: CE = AB^2: AB×CE. Nach der Voraussezung aber ist BD: DC = AB^2: AC^2; folglich ist AB: AC = AC: CE. Es schliessen aber die Seiten AB, AC und AC, CE die gleichen Wechsels-Winkel BAC, ACE ein; mithin sind die Dreyeke BAC, ACE gleichwinklicht, und der Winkel CAD gleich dem Winkel B; also sind auch die Dreyeke ABD, CAD gleichwinklicht; mithin BD: DA = DA: DC; also ist das Rchtk BD×DC gleich dem Quadrat über AD.

2. Saz.

Fig. 53.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BC, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, an einen dritten Punkt C hin gezogen werden; so berührt der Punkt C, in dem sie zusammen stossen, eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Kreis.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit ist.

Fig. 53. a.

Man ziehe AB, und fälle darauf das Perpendikel CD; weil nun AC = CB; so ist (26, 1. E.) AD = DB; nun ist AB der Lage und Grösse nach gegeben, also ist der Punkt D gegeben; und, weil auch der Winkel ADC gegeben ist; so ist DC der Lage nach gegeben (32. D.): also berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Die Komposition ergiebt sich von selbst. Man theile nemlich AB in D in zwey gleiche Theile, und ziehe DC senkrecht auf AD; so sieht man leicht ein, daß die geraden Linien AC, BC, die aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf der Linie DC gezogen werden, gleich seyen.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit ist.

Fig. 53. b.

Weil das Verhältniß von AC zu CB gegeben ist; so ist (54. D.) das Verhältniß des Quadrats über AC zu dem Quadrat über CB gegeben; man verlängere AB bis D so, daß AD : DB = $AC^2 : AB^2$; weil nun AB der Lage und Grösse nach, und das Verhältniß von AD zu DB gegeben ist; so ist der Punkt D, nebst den Stücken AD, BD gegeben; also ist das Rchtk AD × DB gegeben; diesem Rchtk aber ist nach dem 2ten Lehns. das Quadrat von CD gleich; folglich ist dieses Quadrat, mithin die Linie DC selbst der Grösse nach gegeben; es ist aber schon gezeigt worden, daß der Punkt D gegeben seye; also berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis nach dem 1sten Saz des 1sten Buchs.

Kompo-

Komposition.

Es seye das gegebene Verhältniß gleich dem Verhältniß von EF zu FG, nun finde man zu EF, FG die dritte Proportional-Linie FH, und nehme auf der verlängerten Linie AB den Punkt D so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich werde dem Verhältniß von EF zu FH, finde zwischen AD, DB die mittlere Proportional-Linie DK, und beschreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DK einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den gegebenen Punkten A, B an irgend einen Punkt C des Umkreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird AC zu BC in dem gegebenen Verhältniß seyn, welches EF zu FG hat. Denn man ziehe DC; weil nun die 3 Linien AD, DK, DB proportional sind; so ist (2. Zus. 20, 6. E.) $AD^2 : DK^2 =$ (AD : DB = EF : FH =) $EF^2 : FG^2$. Also ist (22, 6. E.) AD : DK = EF : FG. Weil aber AD : $\begin{Bmatrix} DK \\ DC \end{Bmatrix}$ = DC : DB; so sind die Dreyeke ADC, CDB gleichwinklicht; also ist AC : BC = (AD : DC, d. i. =) EF : FG. Von den Punkten K, L aber, in welchen der Umkreis der geraden Linie AB begegnet, wird eben dieses auf folgende Art erwiesen: Weil AD : $\begin{Bmatrix} DK \\ DL \end{Bmatrix}$ = DK : DB; so ist (19, 5. E.) der Rest AK zu dem Rest KB wie (AD zu DK, d. i. wie) EF zu FG: und auf ähnliche Art schließt man aus 12, 5. E., daß auch AL : LB = AD : DK = EF : FG. Man sieht also, daß, wenn man so wohl AK zu KB, als AL zu LB in dem gegebenen Verhältniß von EF zu FG nimmt, daß dann KL der Durchmesser des Kreises seyn werde, welcher der gesuchte Ort ist.

Diß ist derselbe Ort, dessen Verzeichnung Eutocius in seinen Kommentarien über die Vorrede des Apollonius zu dem 1sten Buch seiner Kegelschnitte lehrt, nur beweist er dort diese Verzeichnung durch allzu viele Umschweife, weswegen mit Recht Huygens im 5ten Lehnsaz seiner Dioptrik Schootens Beweis vorzieht. Ich wollte daher für jene Verzeichnung, die allerdings gut, und vielleicht vom Apollonius selbst ist, an die aber ein Stümper jenen langen Beweis anhängte, folgenden kürzern Beweis beifügen.

Der Saz, wie ihn Eutocius ausdrükt S. 11. der Kegelschnitte des Apollonius nach Halleys Ausgabe, heißt so:

Wenn in einer Ebene zwey Punkte gegeben sind nebst dem Verhältniß von zwey ungleichen geraden Linien; so kann auf dieser Ebene ein Kreis beschrieben werden, so, daß die von den gegebenen Punkten an den Umfang des Kreises gezogenen Linien ein Verhältniß unter einander haben, das gleich ist dem gegebenen Verhältniß.

Die gegebenen Punkte seyen A, B; das gegebene Verhältniß das Verhältniß von EF zu FG, EF seye die grössere Linie: und man solle die Aufgabe auflösen.

Man ziehe die Linie AB, verlängere sie auf der Seite von B, und mache EF : FG = FG : FH, und dann EH : AB = FH : BD, und auch EH : AB = FG : DK. Weil also EH : AB = HF : BD; so ist (12, 5. E.) EF : AD = (EH : AB, d. i. =) FG : DK = HF : BD; und verwechselt EF : FG = AD : DK: und auch FG : FH = KD : BD. Nun ist EF : FG = FG : FH; mithin (11, 5. E.) AD : DK = DK : BD. Aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DK beschreibe man einen Kreis, und nehme auf dessen Umfang irgend einen Punkt C, und ziehe CA, CB, CD.

Weil

Weil nun AD : $\left\{\begin{matrix} DK \\ DC \end{matrix}\right.$ = DC : DB, also die Seiten, die den den beyden Dreyeken ADC, CDB gemeinschaftlichen Winkel einschliessen, proportional sind; so sind (6, 6. E.) diese beyden Dreyeke ähnlich: also ist AC : CB = AD : DC = EF : FG.

Bey Eutocius ist noch ein Beweis beigefügt, worinn gezeigt wird, daß gerade Linien, die aus A, B an einen Punkt gezogen werden, der nicht auf dem Umfang des Kreises KC liegt, nicht eben das Verhältniß unter einander haben, wie EF zu FG. Und es würde wirklich nöthig seyn, diß zu erweisen, wenn nicht die Analyse vorausgeschikt worden wäre. Denn aus dieser weiß man, daß der Punkt, in dem die geraden Linien zusammen stossen, die das gegebene Verhältniß von EF zu FG unter einander haben, und aus A, B gezogen sind, den Umfang des Kreises KC berühren. Wollte man dann irgend einen andern Punkt nehmen, der nach der Voraussezung nicht auf diesem Kreis liegen soll; so wird völlig wie in der Analyse gezeigt, daß der nemliche Punkt auf dem Umfang dieses Kreises liege, und diß ist widersprechend. Eben dieses ist bey allen übrigen Oertern zu bemerken.

Eben dieses noch auf eine andere Art ohne Hülfe des Lehnsazes bewiesen.

Fig. 53. c.

Wenn man aus den gegebenen Punkten A, B an einen dritten Punkt C hin die ungleichen geraden Linien AC, BC zieht, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben; so soll bewiesen werden, daß der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis berühre.

Man ziehe aus C an die verlängerte Linie AB die gerade Linie CD so, daß der Winkel BCD gleich werde dem Winkel BAC; so sind folglich die Dreyeke ADC, DCB gleichwinklicht; also ist AC : CB = AD : DC = DC : DB. Auf AD nehme man ED = DC, und, weil AD, ED, BD proportional sind; so verhält sich AD zu DE wie der Rest AE zu dem Rest EB. Es ist aber nach der Voraussezung das Verhältniß von AC zu CB, d. i. von AD zu DC oder DE gegeben, also ist das Verhältniß von AE zu EB gegeben; und, weil AB gegeben ist; so ist folglich auch AE, mithin der Punkt E gegeben. Und, weil das Verhältniß von AD zu DE gegeben ist; so ist AD, DE oder DC und der Punkt D gegeben. Weil also aus einem gegebenen Punkt D die der Grösse nach gegebene gerade Linie DC gezogen ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis (1, I.).

Komposition.

Man nehme auf AB den Punkt E so, daß AE zu EB das gegebene Verhältniß habe, und mache AD zu DE wie AE zu EB; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn aus den Punkten A, B ziehe man an irgend einen Punkt C auf dem Umfang des Kreises die geraden Linien AC, BC, und durch die Punkte D, C, die gerade Linie DC. Weil nun AD : DE = AE : EB; so ist (19, 5. E.) AD : DE = DE : DB. Es ist aber DC = DE, also sind die Dreyeke ADC, CDB gleichwinklicht (6, 6. E.); folglich ist AC : CB = (AD : $\left\{\begin{matrix}DC\\DE\end{matrix}\right.$, d. i. =) AE : EB, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

1. Zus.

1. Zus. Weil AE : EB = AD : DE; so ist, wenn man EF = EB nimmt, getheilt (dividendo) AF : FE = AE : ED = (19, 5. E.) $\begin{cases} FE \\ EB \end{cases}$: BD; und diß ist Schookens Verzeichnung.

2. Zus. Aus der nemlichen Proportion AD : DE = AE : EB folgt umgekehrt (convertendo) AD : AE = (Zus. 19, 5. E.) AE : AF.

Anm. des Uebersezers. In Bezug auf den Fall dieses Sazes, wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit ist, theilte mir Herr Prof. Pfleiderer folgende Bemerkungen mit, die den Zusammenhang des Sazes mit 3, 6. E. zeigen.

Fig. 53. b.

§. 1. Wenn man in einem Dreyek ABC, in welchem AC > BC, die grössere Seite AC über den Scheitel C hinaus verlängert; so begegnet die gerade Linie CL, welche den äussern Winkel BCF in 2 gleiche Theile theilt, der verlängerten Linie AB in einem Punkt L, so, daß AL : BL = AC : BC. Und umgekehrt, wenn man die nach der Seite des kleinern Schenkels BC hin verlängerte Grundlinie AB in dem Punkt L so schneidet, daß AL : BL = AC : BC; so theilt die an den Scheitel gezogene gerade Linie CL den äussern Winkel BCF in 2 gleiche Theile. Denn in beyden Fällen schneide man von dem grössern Schenkel CA das Stük CP = CB ab, und ziehe BP; so ist CBP = CPB (5, 1. E.). Nun ist

a) weil BC < AC (Voraussſ.), der Winkel A < CBA (18, 1. E.) folglich FCB = CBA + A (32, 1. E.) < 2 CBA, und LCB = $\frac{1}{2}$ FCB (Voraussſ.) < CBA, und LCB + LBC < CBA + LBC, folglich < 2 rechte Winkel (13, 1. E.). Mithin begegnen sich die nach den

den Winkeln LCB, LBC hin verlängerten Linien BL, CL in einem Punkt L (11. Grunds. 1. E.). Nun ist FCB = CPB + CBP (32, 1. E.) = 2 CPB = 2 CBP, folglich $\frac{1}{2}$ FCB = CPB = CBP, d. h. nach der Vorauss. FCL = LCB = CPB = CBP; folglich sind die Linien CL, BP gleichlauffend (27, 1. 28, 1. E.) und es ist AL : BL = AC : CP (2, 6. E.) = AC : CB (11, 5. E.), weil nemlich AC : CP = AC : CB (7, 5. E.), indem CP = CB (Verzeich.).

b) Ist aber AL : BL = AC : BC, und folglich weil CP = CB (Verz.) AL : BL = AC : CP (7, 5. 11, 5. E.); so sind die Linien CL, BP gleichlauffend (2, 6. E.), und FCL = CPB, LCB = CBP (29, 1. E.), mithin FCL = LCB, weil CPB = CBP (5, 1. E.).

§. 2. Da die Linien CK, CL, wovon die eine den Winkel ACB des Dreyeks, die andere seinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile theilt, einen rechten Winkel LCK einschliessen, weil nemlich LCK = BCK + BCL = $\frac{1}{2}$ (ACB + BCF) = einem rechten Winkel (13, 1. E.); so geht der über dem Durchmesser KL beschriebene Kreis durch den Scheitelpunkt C (1. Schol. 31, 3. E.). Zugleich sind sowohl die durch den Punkt K, und die Endpunkte A, B der Grundlinie begränzten Linien AK, BK, als auch die durch den Punkt L, und die Punkte A, B begränzte Linien AL, BL den anliegenden Seiten des Dreyeks AC, BC proportional (3, 6. E. und §. 1.).

§. 3. Umgekehrt, wenn sowohl die Stüke AK, BK der Grundlinie, als die, auf der nach der Seite des kürzern Schenkels BC hin verlängerten Grundlinie, abgeschnittenen Stüke AL, BL das Verhältniß der anliegenden Seiten AC, BC haben; so theilen die aus den Punkten K, L an den Scheitel C gezogenen Linien DC, LC den Winkel des Dreyeks ACB, und seinen Nebenwinkel FCB in 2 gleiche Theile (3, 6. E. und §. 1.);

folg-

folglich schliessen sie (§. 2.) einen rechten Winkel ein, und der über dem Durchmesser KL beschriebene Kreis geht durch den Scheitelpunkt C des Dreyeks.

§. 4. Wenn also auf einerley Grundlinie AB, die nichtgleichschenklichten Dreyeke ACB, AMB stehen, bey welchen die grössern Schenkel AC, AM an einerley Punkt A der Grundlinie anliegen, folglich eben so die kleinere, und wenn die grössern Schenkel zu den kleinern beyderseits einerley Verhältniß haben, daß nemlich AC : BC = AM : BM, und man theilt den Winkel ACB eines dieser Dreyeke, und eben so seinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des grössern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie und ihrer Verlängerung in den Punkten K und L begegnen, in 2 gleiche Theile: so geht der über dem Durchmesser KL beschriebene Kreis durch die Scheitelpunkte C und M der Dreyeke. Von dem ersten Dreyek ACB ist diß §. 2. erwiesen worden, und von dem andern folgt es aus §. 3. Denn, da

so wohl AK : BK
als AL : BL } = AC : BC (Verz. und §. 2.), und

AC : BC = AM : BM (Vorauss.); so ist

so wohl AK : BK
als AL : BL } AM : BM (11, 5. E.); folglich theilen (§. 3.) die Linien KM, LM den Winkel AMB und seinen Nebenwinkel BMQ in 2 gleiche Theile, der Winkel KML ist ein rechter, und der über dem Durchmesser KL beschriebene Kreis geht durch M.

§. 5. Umgekehrt, wenn man in einem nichtgleichschenklichten Dreyek ACB, den Scheitel-Winkel ACB und seinen Nebenwinkel FCB, den die Verlängerung des grössern Schenkels mit dem kleinern macht, durch die Linien CK, CL, die der Grundlinie, und ihrer Verlängerung in K, L begegnen, in 2 gleiche Theile theilt, und über dem Durchmesser KL einen Kreis beschreibt,

schreibt, der (§. 2.) durch den Punkt C geht; so bilden die geraden Linien AM, BM, die man aus A und M an irgend einen Punkt M des Kreises zieht, mit der Grundlinie ein Dreyek AMB, worinn AM : BM = AC : BC.

Denn so ist

$\left.\begin{array}{r}\text{sowohl } AK : BK \\ \text{als } AL : BL\end{array}\right\} = AC : BC$ (3, 6. E. und §. 1.)

folglich AL : BL = AK : BK (11, 5. E.), mithin ist (14, 5. E.) BL > BK, weil AL > AK (Verzeichn.); folglich fällt der Mittelpunkt D des beschriebenen Kreises auf die Linie BL zwischen B und L. Ferner ist AL + AK : BL + BK = AK : BK (12, 5. E.), oder, weil AL + AK = KL + 2 AK = 2 DK + 2 AK = 2 AD, und BL + BK = KL = 2DK; so ist

2AD : 2DK = AK : BK, mithin

AD : DK = AK : BK (15, 5. und 11, 5. E.)

und ferner $AD : DK = \left\{\begin{array}{c} AD - AK : DK - BK \\ DK \quad : \quad BD \end{array}\right\}$ (19, 5. E.)

oder AD : DM = DM : BD (7, 5 und 11, 5. E.), weil DK = DM (Verz.). Es sind mithin (6, 6. E.) die Dreyeke ADM, MDB ähnlich, und es ist AM : AD = BM : DM, und verwechselt

AM : BM = AD : DM (16, 6. E.) = AD : DK (7, 5. 11, 5. E.). Aber

AD : DK = AK : BK = AC : BC (11, 5. E.); folglich auch AM : BM = AC : BC (11, 5. E.).

§. 6. Aus dem §. 5. Erwiesenen folgt zugleich, daß, wenn eine gegebene gerade Linie AB in irgend einem Punkt K in 2 ungleiche Theile getheilt, und dann auf der Seite des kleinern Stüks verlängert wird, bis AL : BL = AK : BK wird; und wenn dann über der Linie KL als Durchmesser ein Kreis beschrieben, und von irgend einem Punkt M desselben die geraden Linien MA, MB gezogen werden, daß, sage ich, diese Linien

den

den anliegenden Stüken AK, BK proportional seyn werden, d. h. daß seyn werde
AM : BM = AK : BK = AL : BL. Denn aus der Proportion AK : BK = AL : BL folgt nach §. 5.
AM : BM = AD : DM = AK : BK.

§. 7. Wenn man hingegen aus irgend einem Punkt N innerhalb oder ausserhalb des nach §. 5. oder 6. beschriebenen Kreises an die Punkte A, B gerade Linien AN, BN zieht; so ist nicht NA : NB = CA : CB = AK : BK. Denn die gerade Linie BN muß selbst, oder verlängert, dem Kreis, innerhalb dessen sie (Verzeichn.) liegt, in einem Punkt M begegnen; zieht man nun die geraden Linien AM, BM; so ist AM : BM = AC : BC = AK : BK (§. 5. 6.), und weil (Voraussf. §. 5. 6.) AC > BC, AK > BK; so ist AM > BM, und ABM > MAB (18, 1. E.). Zieht man nun durch den Punkt N eine Linie NO mit AM gleichlauffend, und begegnet NO der Linie AB oder ihrer Verlängerung in O; so ist (29, 1. und 4, 6. E.) NO : NB = AM : BM. Liegt nun der Punkt N ausserhalb des Kreises; so ist der Winkel NOA = MAB (29, 1. E.). Aber, wenn man NA gezogen denkt, so ist NAO > NBA oder MBA (16, 1. E.); folglich, da MBA > MAB, noch vielmehr NAO > MAB, und da NOA = MAB; so ist auch NAO > NOA; folglich NO > NA (19, 1. E.), und NO : NB > NA : NB (5, 8. E.). Folglich auch AM : BM, oder AC : BC, oder AK : BK > NA : NB (13, 5. E.).

Liegt aber der Punkt N innerhalb des Kreises; so ist NOA > NBA oder MBA (16, 1. E.), und MAB > NAB (7. Grundsf. 1. E.); folglich da MBA > MAB; so ist noch vielmehr NOA > MAB, und abermahls noch vielmehr NOA > NAB, mithin NA > NO (19, 1. E.), und NA : NB > NO : NB; folglich NA : NB

> AM :

$>$ AM : BM oder $>$ AC : BC, oder $>$ AK : BK (13, 5. E.).

§. 8. Wenn also ein nichtgleichschenklichtes Dreyek ABC vorgelegt wird; so ist der Ort, welchen sein Scheitel C, und die Scheitel aller übrigen, in der nemlichen Ebene, über der Grundlinie AB beschriebenen Dreyeke berühren, deren den Punkten A, B anliegende Schenkel sich verhalten, wie AC: BC, ein Kreis, der in der nemlichen Ebene über dem Durchmesser KL beschrieben wird, dessen Endpunkte K, L durch gerade Linien CK, CL bestimmt werden, die den Winkel ACB und seinen Nebenwinkel FCB (den die Verlängerung des grössern Schenkels mit dem kleinern macht) in zwey gleiche Theile theilen, und an die Grundlinie und ihre Verlängerung hin gezogen werden (§. 5. 7.).

§. 9. Oder auch: der vorhin genannte Ort ist ein Kreis, der über dem Durchmesser KL beschrieben wird, wo die Punkte K, L so bestimmt werden, daß K auf der Linie AB selbst so genommen wird, daß AK : BK = AC : BC, und eben so L auf der nach der Seite des kleinern Stüks BK hin gemachten Verlängerung so, daß AL : BL = AC: BC (§. 6. 7.).

Berechnung.

Der 1ste Fall ist für sich klar.

Fig. 53. b.

2. Fall. Es ist $AD : DB = AC^2 : BC^2$, folglich

$$\left.\begin{matrix} AD - DB \\ AB \end{matrix}\right\} : DB = AC^2 - BC^2 : BC^2, \text{ mithin}$$

$$DB = \frac{AB \,.\, BC^2}{AC^2 - BC^2}, \text{ und } AD = \frac{AB \,.\, AC^2}{AC^2 - BC^2},$$

folg-

folglich $DC^2 = AD \times DB = \frac{AB^2 . AC^2 . BC^2}{(AC^2 - BC^2)^2}$

also $DC = \frac{AB. AC. BC}{AC^2 - BC^2} = \frac{AB. AC. BC}{(AC+BC)(AC-BC)}$

Ferner $AK = AD - DC = \frac{AB. AC}{AC+BC}$

und $AL = AD + DC = \frac{AB. AC}{AC-BC}$

3. Saz.

Wenn eine gerade Linie der Lage nach, und auf derselben ein Punkt gegeben ist, aus dem eine endliche gerade Linie gezogen wird; wenn dann aus dem Endpunkt dieser gezogenen Linie ein Perpendikel auf die der Lage nach gegebene gerade Linie gefällt wird; und, wenn das Quadrat der zuerst gezogenen geraden Linie gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und dem Stük der geraden der Lage nach gegebenen Linie, welches zwischen dem gefällten Perpendikel, und dem gegebenen Punkt, oder zwischen dem gefällten Perpendikel, und einem andern gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Oder noch allgemeiner.

Wenn aus einem gegebenen Punkt eine gerade Linie und aus deren Endpunkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie eine mit einer andern der Lage nach gegebenen gleichlauffende gerade Linie gezogen wird; und, wenn das Quadrat der zuerst gezogenen Linie gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie, und demjenigen Stük der ersten der Lage nach gegebenen geraden Linie, welches zwischen der

zweyten

zweyten gezogenen Linie und einem gegebenen Punkt abgeschnitten ist: so berührt der Endpunkt der zuerst gezogenen Linie einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerst gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden soll, durch den gegebenen Punkt geht, aus welchem die erste gerade Linie gezogen ist, und, wenn dieser gegebene Punkt zugleich auch der eine Endpunkt des Stüks ist, welches von der zweyten geraden Linie abgeschnitten wird.

Fig. 54. a.

Es seye auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB der Punkt A gegeben, und aus A die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an AB die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie AF gleichlauffend gezogen; und es seye das Quadrat von AC gleich dem Rechtek EAD, das zwischen einer gegebenen Linie AE, und dem zwischen CD und dem Punkt A abgeschnittenen Stük AD enthalten ist: so berührt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, man ziehe CE, und, weil das Quadrat über AC gleich ist dem Rchtk EAD; so ist EA: AC = AC: AD; folglich sind (6, 6. E.) die Dreyeke EAC, CAD ähnlich; nun ist der Winkel ADC gegeben, weil CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend ist; also ist der Winkel ACE gegeben; und, weil die gerade Linie AE der Lage und Grösse nach, und überdiß auch der Punkt A gegeben ist; so ist auch der Punkt E gegeben (30. D.); also berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 2ten Saz des ersten Buchs.

Kompo-

Komposition.

Es seye A der gegebene Punkt, und man nehme auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB auf beyden Seiten von A, AE gleich der gegebenen geraden Linie, AF seye die gerade Linie, mit welcher die an AB zu ziehende Linien CD gleichlauffend seyn sollen, und man beschreibe auf derjenigen Seite von AB, auf welcher AF nicht liegt, über AE einen Kreis-Abschnitt, der eines dem gegebenen Winkel EAF gleichen Winkels fähig seye (33, 3. E.), und eben so verfahre man bey der andern Linie AE; so werden diese Kreis-Abschnitte der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C derselben aus A die gerade Linie AC, und aus dem Punkt C an AB die Linie CD mit AF gleichlauffend zieht; so wird das Quadrat über AC gleich seyn dem Rchtk EAD. Denn, weil der Winkel CDA gleich ist dem Wechselswinkel DAF, d. i. dem Winkel ACE; so sind die Dreyeke DAC, CAE gleichwinklicht, mithin ist EA : AC = AC : AD, also das Quadrat über AC gleich dem Rchtk EAD.

Fig. 54. b.

Zus. Wenn also aus einem Punkt C auf eine der Lage und Grösse nach gegebene gerade Linie AE ein Perpendikel CD gefällt wird, und das Quadrat über CD gleich ist dem Rchtk ADE, das zwischen den Abschnitten der Linie AE enthalten ist; so berührt der Punkt C einen über AE beschriebenen Halbkreis. Denn, man seze auf beyden Seiten das Quadrat über AD hinzu; so ist die Summe der Quadrate über AD und über DC, d. i. das Quadrat über AC gleich dem Rchtk EAD. Folglich berührt der Punkt C nach dem gegenwärtigen Fall einen über dem Durchmesser AE beschriebenen Kreis. Eben dieses beweist Pappus im 2ten Lehnsaz

zum

zum Isten Buch von Apollonius Kegelschnitten auf eine andere Art.

2. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerst gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden soll, wie in dem ersten Fall, durch den gegebenen Punkt geht, aus welchem die erste gerade Linie gezogen ist; wenn aber von diesem Punkt derjenige Punkt verschieden ist, an welchem das Stük liegt, welches von der geraden mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffenden Linie abgeschnitten wird.

Fig. 54. c.

Es seyen auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie AB die zwey Punkte A, E gegeben; aus dem Punkt A seye die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an AB die Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AL gleichlauffend gezogen; und es seye das Quadrat über AC gleich dem Rchtk, das zwischen einer der Grösse nach gegebenen Linie AB, und dem zwischen CD und dem Punkt E abgeschnittenen Stük DE enthalten ist: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Es falle der Punkt D auf die nach A hin verlängerte Linie AE. Weil nun nach der Voraussezung das Quadrat über AC gleich ist dem Rchtk AB×DE, d. i. (1, 2. E.) gleich ist der Summe der Rchtke BAD, und BAE; so ist, wenn man das Rchtk CAF gleich macht dem Rchtk BAD, diese gleiche Rchtke CAF, BAD hinweg genommen, der Rest, d. i. (3, 2. E.) das Rchtk ACF gleich dem Rchtk BAE. Nun ist das Rchtk BAE gegeben, weil AB, AE gegeben sind; also ist auch das Rchtk ACF gegeben. Man ziehe BF, weil nun die Rchtke BAD, CAF gleich sind; so ist BA : AF = AC : AD;

AD; mithin sind (6, 6. E.) die Dreyeke BAF, CAD gleichwinklicht; also ist der Winkel AFB gleich dem gegebenen Winkel ADC; nun sind die Punkte A, B gegeben; also berührt der Punkt F einen der Lage nach gegebenen über AB beschriebenen Umkreis nach dem 2ten Saz des Isten Buchs. Man beschreibe diesen Kreis, sein Mittelpunkt seye G, und man ziehe die Linie CG, die dem Kreis in den Punkten H, K begegne. Es ist also GH, mithin das Quadrat über GH gegeben. Es ist aber auch das Rchtk KCH gegeben, denn diß Rchtk ist gleich (36, 3. E.) dem Rchtk ACF, und es ist bewiesen worden, daß das Rchtk ACF gegeben seye. Mithin ist die Summe des Quadrats von GH und des Rchtks KCH gegeben, also ist (6, 2. E.) das Quadrat über GC, mithin die Linie GC gegeben; und, da der Punkt G gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz des Isten Buchs.

2. Es seye AC, *CD* gezogen, wie gesagt worden, und der Punkt *D* falle auf die gerade Linie AE selbst; weil nun nach der Voraussezung $AC^2 = AB \times DE$; so ist, das gemeinschaftliche Rchtk BA*D* hinzugefügt, $AC^2 + BA \times AD = BA \times AE$, und dieses Rchtk BAE ist gegeben. Man verlängere CA bis an den Punkt *F*, so, daß das Rchtk *CAF* gleich seye dem Rchtk BA*D*; so ist (3, 2. E.) $AC^2 + BA \times AD = AC \times CF$; also ist das Rchtk A*CF* gegeben. Man ziehe B*F*; so wird, wie bey n. 1. dieses Falls bewiesen werden, daß der Winkel A*F*B gleich seye dem gegebenen Winkel A*DC*. Mithin berührt der Punkt *F* den bey n. 1. beschriebenen Umkreis, dessen Mittelpunkt G ist, und es wird, wie dort, bewiesen, daß der Punkt *C* den Umfang desselben Kreises berühre, den der Punkt C berührt.

3. Es seye Ac, cd gezogen, wie gesagt worden, und der Punkt d falle auf die nach E hin verlängerte Linie

nie AE, und man nehme Ab gleich AB auf der entgegen gesezten Seite des Punkts A. Weil nun nach der Voraussezung, $Ac^2 = Ab \times dE$; so ist, das Rchtk bAE beyderseits hinzu gefügt $Ac^2 + bA \times AE = bA \times Ad$. Man verlängere Ac bis an den Punkt f, so, daß das Rchtk $cA \times Af$ gleich seye dem Rchtk $bA \times Ad$; weil also $Ac^2 + bA \times AE = cA \times Af$; so ist, das gemeinschaftliche Quadrat von Ac abgezogen, der Rest, d. h. das Rchtk bAE gleich dem andern Rest, d. i. dem Rchtk Acf, welches also gegeben ist. Man ziehe bf; weil nun die Rchtke bAd, cAf gleich sind; so sind die Dreyeke bAd, cAf gleichwinklicht; also ist der Winkel Afb gleich dem gegebenen Winkel Adc, und, weil die Punkte A, b gegeben sind; so berührt der Punkt f einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 2ten Saz des Isten Buchs. Man beschreibe diesen Kreis, sein Mittelpunkt seye g, und man ziehe die Linie cg, die dem Kreis in den Punkten h, k begegne. Es ist also das Quadrat über kg, d. h. die Summe des Rchtks kch und des Quadrats gc gegeben; es ist aber das Rchtk kch gegeben, denn diß Rchtk ist (35, 3. E.) gleich dem gegebenen Rchtk Acf; mithin ist auch der Rest nemlich das Quadrat über gc gegeben. Also ist gc der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt g gegeben ist; so berührt der Punkt c einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz des Isten Buchs.

Weil aber hier, bey n. 3. den Ort zu finden, erfodert wird, daß das Rchtk kch, welches gleich ist dem gegebenen Rchtk Acf, oder bAE von dem Quadrat über kg weg genommen werde, und, weil diß nicht immer geschehen kann; so wird hier bey n. 3. der Ort nicht immer verzeichnet werden können. Sollte es nemlich geschehen, daß das Rchtk bAE gleich wäre dem Quadrat über kg, oder Ag dem Halbmesser des Kreises, dessen über Ab beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt,

der

der gleich ist dem gegebenen Winkel Adc; so wird der einzige Punkt g der Foderung Genüge thun. Wäre das Rchtk bAE grösser, als das Quadrat über Ag; so würde gar kein Ort gefunden werden können. Sollen also die Linien cd, welche mit der der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend sind, der nach E hin verlängerten Linie AE begegnen; so muß nothwendig das Rchtk bAE kleiner seyn, als das Quadrat über Ag. Diß vorausgesezt, ist Folgendes die

Komposition.

Es seye AB die gerade der Lage nach gegebene Linie, auf dieser Linie seyen die Punkte A, E gegeben, und man nehme auf der nach A hin verlängerten Linie AE das Stük AB gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie, diesem mache man auf der entgegen gesezten Seite das Stük Ab gleich, und es seye AL die gerade Linie, mit welcher die an AB zu ziehende gerade Linien gleichlauffend seyn sollen. Man beschreibe einen Kreis, dessen über AB liegender Abschnitt einen Winkel fasse gleich dem Winkel BAL, der Mittelpunkt dieses Kreises seye G, sein Durchmesser AGM. Ueber AM beschreibe man ein Rchtk, so, daß die Summe dieses Rchtks, und eines über der Verlängerung von AM als Ergänzung des Rchtks beschriebenen Quadrats gleich seye dem gegebenen Rchtk BAE (29, 6. E.). Die hiedurch gefundene Verlängerung von AM seye MN, also das Rchtk ANM gleich dem Rchtk BAE. Aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GN beschreibe man einen Kreis LCN. Und, wenn das Rchtk BAE kleiner ist als das Quadrat von AG; so verlängere man MA nach O, und nehme AO = AM. Ueber einem Stük AP der Linie AO beschreibe man ein Rchtk gleich dem Rchtk BAE, und bestimme den Punkt P so, daß die über dem andern

andern Stük PO der Linie AO beschriebene Ergänzung des Rchtks ein Quadrat werde (28, 6. E.), d. h. man mache das Rchtk APO gleich dem Rchtk BAE. Die Linie AO theile man in dem Punkt g in zwey gleiche Theile, und beschreibe aus dem Mittelpunkt g mit dem Halbmesser gP einen Kreis cP; so werden die Peripherien der Kreise cP und CN der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus dem Punkt A an irgend einen Punkt derselben C eine gerade Linie AC, und aus dem Punkt C an AB eine mit AL gleichlauffende Linie CD zieht; so wird das Quadrat über AC gleich seyn dem Rchtk, das zwischen der gegebenen Linie AB, und dem zwischen CD und dem Punkt E abgeschnittenen Stük DE enthalten ist.

Nun muß zuerst bewiesen werden, daß der Punkt E zwischen den geraden Linien QS, RT liege, welche die Kreise in den Punkten Q, R berühren, in welchen sie die Linie Gg schneidet. Man denke sich BM, bO gezogen; weil nun die Winkel AQS, ABM gleich sind (denn beyde sind rechte Winkel 18, und 31, 3. E.); so sind die Dreyeke AQS, ABM gleichwinklicht; also ist das Rchtk BAS gleich dem Rchtk MAQ oder AMN. Es ist aber das Rchtk BAE oder ANM grösser als das Rchtk AMN, also das Rchtk BAE grösser als das Rchtk BAS, und AE > AS. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß das Rchtk BAT gleich seye dem Rchtk MAR oder AOP; es ist aber das Rchtk BAE oder APO kleiner als das Rchtk AOP oder BAT. Mithin AE < AT. Also liegt der Punkt E zwischen S und T. Weil aber der disseits der Linie BA liegende Winkel BAL gleich ist dem in dem jenseitigen Kreis-Abschnitt liegenden Winkel AMB; so berührt AL den Kreis ABM (umgek. 32, 3. E.); also sind die Linien AL, QS, RT gleichlauffend. Also muß jede aus irgend einem Punkt des Kreises CN mit AL, d. i. mit QS gleichlauffend gezogene Linie der

Linie

Linie AE, oder der nach A hin verlängerten Linie AE begegnen, und jede aus irgend einem Punkt des Kreises PR mit AL, d. i. mit RT gleichlauffend gezogene Linie muß der nach T hin verlängerten Linie AT begegnen. Man nehme also auf dem Umkreis CN irgend einen Punkt C, und die aus diesem Punkt mit AL gleichlauffend gezogene Linie CD begegne

1. Der nach A hin verlängerten Linie AE, man ziehe die Linie AC, die dem Kreis BKM in F begegne, und durch die Punkte B, F ziehe man noch die gerade Linie BF. Nach der Verzeichnung ist also der Winkel AFB gleich dem Winkel BAL, d. i. dem Wechsels-Winkel ADC; also sind die Dreyeke AFB, ADC gleichwinklicht; folglich das Rchtk CAF gleich dem Rchtk BAD. Es ist aber, wenn man die gerade Linie CHGK zieht, das Rchtk ACF gleich (dem Rchtk KCH, d. i. gleich dem Rchtk ANM, d. i. nach der Verzeichnung gleich) dem Rchtk BAE. Also ist die Summe der Rchtke CAF und ACF, d. i. das Quadrat über AC gleich der Summe der Rchtke BAD, BAE, d. i. dem Rchtk AB×DE.

2. Es seye *AC*, *CD* gezogen, wie vorhin, aber *CD* begegne der Linie AE selbst; so wird, die übrigen Linien gezogen wie vorhin, bewiesen werden, daß das Rchtk *CAF* dem Rchtk BA*D*, und das Rchtk A*CF* dem Rchtk BAE gleich seye. Mithin ist der Ueberschuß des Rchtks A*CF* über das Rchtk *CAF*, d. i. das Quadrat über AC gleich dem Ueberschuß des Rchtks BAE über das Rchtk BA*D*, d. i. gleich dem Rchtk AB×*D*E.

3. Man ziehe an irgend einen Punkt c des Kreises PR die Linie Ac, und dann cd mit AL gleichlauffend; so wird cd der nach T hin verlängerten Linie AT begegnen, weil nemlich RT den Kreis berührt; und man wird, die übrigen Linien wie vorhin gezogen, eben so beweisen können, daß das Rchtk bAd gleich seye dem

 Rchtk

Rchtk cAf, d. i. der Summe des Quadrats über Ac und des Rchtks Acf. Es ist aber das Rchtk Acf gleich (dem Rchtk kch, d. i. dem Rchtk APO, d. i. nach der Verzeichnung) dem Rchtk bAE; also ist das Rchtk bAd gleich der Summe des Quadrats über Ac, und des Rchtks bAE; und, das gemeinschaftliche Rchtk bAE abgezogen, ist das Rchtk bA×dE gleich dem Quadrat über Ac.

Fig. 54. d.

3. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, an welche aus dem Endpunkt der zuerst gezogenen Linie eine gerade Linie gezogen werden soll, nicht durch den Punkt geht, aus welchem die erste Linie gezogen worden.

Es seye der Punkt A, die Lage der geraden Linie BE, und auf dieser der Punkt E gegeben; aus dem Punkt A seye die Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an BE die Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen; und es seye das Quadrat über AC gleich dem Rchtk, das zwischen einer der Grösse nach gegebenen Linie BE, und dem zwischen CD und dem Punkt E abgeschnittenen Stük DE enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Durch den Punkt A ziehe man eine gerade Linie mit BE gleichlauffend, diese begegne der Linie CD in dem Punkt F, und durch den Punkt E ziehe man an AF die Linie EG mit CD gleichlauffend. Weil nun BE der Lage nach gegeben ist; so ist (31. D.) AF der Lage nach gegeben, und, weil durch einen gegebenen Punkt E die Linie EG gleichlauffend mit CD, und CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist; so ist EG der Lage nach gegeben, also ist der

der Punkt G gegeben. Es ist aber FG = DE; weil also aus einem gegebenen Punkt A eine Linie AC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie an die der Lage nach gegebene gerade Linie AG die gerade Linie CF mit einer der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend gezogen ist; und, weil das Quadrat über AC gleich ist dem Rchtk, das zwischen der gegebenen Linie EB, und dem zwischen CF und dem gegebenen Punkt G abgeschnittenen Stük FG enthalten ist; so wird wie beym 1sten oder 2ten vorhergehenden Fall bewiesen werden, daß der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre.

Berechnung.

Fig. 54. a.

1. Fall. Es seye AG = Ag der Halbmesser des zu beschreibenden Kreises; so ist, wie beym 2ten Saz des Isten Buchs, GAB das Komplement des Winkels ACE, d. h. des Winkels EAF, und es ist

$$\left.\begin{matrix} AG \\ Ag \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\, AE.\ \text{cosec.}\ EAF.$$

Fig. 54. c.

2. Fall. Es ist, wie beym ersten Fall, GAB = gAb = dem Komplement des Winkels BAL, und AG = Ag = $\tfrac{1}{2}$ AB. cosec. BAL. Nun ist (6, 2. E.) $GC^2 = GH^2 + KC \times CH = AG^2 + BA \times AE$, d. h. $GC^2 = \tfrac{1}{4}\, AB.^2\ \text{cosec.}\ \overline{BAL}^2 + BA \times AE$, mithin ist

$$GC = \sqrt{\tfrac{1}{4}\, AB.^2\ \text{cosec.}\ BAL^2 + BA \times AE}.$$

Und (5, 2. E.) ist $gc^2 = gh^2 - kc \times ch = Ag^2 - BA \times AE$.

Mithin ist $gc = \sqrt{\tfrac{1}{4}\, AB.^2\ \text{cosec.}\ BAL^2 - BA \times AE}$.

Der 3te Fall wird eben so, wie bey der geometrischen Analysis, auch bey der Berechnung auf einen der vorhergehenden Fälle zurük gebracht.

3. Lehnsaz.

Fig. 55. a. b. c.

In dem Dreyek ABC liege der Punkt D auf der Seite AC, oder auf ihrer Verlängerung, und es verhalte sich AE zu EB, wie das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, und durch die Punkte B, D, und C, E seyen die geraden Linien BD, CE gezogen. Wenn nun entweder der Punkt E auf der nach B hin verlängerten Linie AB, und zugleich der Punkt D zwischen A und C liegt; oder, wenn der Punkt E zwischen A und B und zugleich der Punkt D auf der nach C hin verlängerten Linie AC liegt; so wird der Winkel BDC gleich seyn dem Winkel BCE. Wenn aber der Punkt E auf der nach A hin verlängerten Linie AB, und der Punkt D zwischen den Punkten A und C liegt; so wird der Winkel BDA, d. i. der Nebenwinkel von BDC gleich seyn dem Winkel BCE. Und umgekehrt, wenn die Winkel gleich sind; so wird sich das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC verhalten, wie AE zu EB.

Denn man ziehe durch den Punkt A eine gerade Linie mit CE gleichlauffend; diese begegne der Linie CB in dem Punkt F; weil sich nun das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC verhält, wie (AE zu EB, d. i. wegen der Parallelen wie FC zu CB, d. i. wie) das Rchtk FCB zu dem Quadrat über BC; so ist dus Rchtk ACD gleich dem Rchtk FCB. Also liegen die Punkte A, D, B, F auf dem Umfang eines Kreises, und im ersten und 2ten Fall ist der Winkel BDC gleich dem Winkel AFB, d. i. dem Winkel BCE. Aber im 3ten Fall ist der Winkel ADB gleich dem Winkel AFB, d. i. dem Winkel BCE.

Und umgekehrt, wenn der Winkel BDC, oder im 3ten Fall der Winkel ADB gleich ist dem Winkel BCE,

d. i.

d. i. dem Winkel AFB; so liegen die Punkte A, D, B, F in dem Umfang eines Kreises, mithin ist das Rchtk ACD gleich dem Rchtk FCB. Und es verhält sich das Rchtk FCB zu dem Quadrat über BC wie FC zu CB, d. i. wie AE zu EB.

4. Lehnsaz.

Fig. 56.

Dieser Lehnsaz ist bey Pappus der 121ste Saz des 7ten Buchs, und sein 3ter Lehnsaz fürs IIte Buch des Apollonius.

Wenn in einem Dreyek ABC der Ueberschuß des Quadrats von AB über einen gegebenen Raum E zu dem Quadrat von AC das gegebene Verhältniß von BD zu DC hat; so ist das Rchtk DBC grösser, als der Raum E.

Denn man nehme von dem Quadrat über AB ein Rchtk ABG gleich dem gegebenen Raum E hinweg; so ist folglich das Verhältniß des Ueberrests, d. h. des Rchtks BAG zu dem Quadrat über AC gegeben, nemlich gleich dem Verhältniß von BD zu DC. Man mache das Rchtk FAC gleich dem Rchtk BAG; so ist folglich $FA \times AC : AC^2$, d. i. $FA : AC = BD : DC$. Also ist AD mit BF gleichlauffend; folglich der Winkel F gleich dem Winkel CAD. Es ist aber der Winkel F gleich dem Winkel AGC, weil die Punkte B, G, C, F auf dem Umfang eines Kreises liegen. Also ist der Winkel AGC gleich dem Winkel CAD. Nun ist der Winkel ADH grösser als der Winkel CAD (16, 1. E.), mithin ist ADH grösser als AGC. Man ziehe GK so, daß der Winkel AGK gleich werde dem Winkel ADH; so liegen die Punkte A, G, K, D auf dem Umfang eines Kreises. Also wird das Rchtk DBC, welches grösser ist,

ist, als das Rchtk DBK, d. i. grösser als das Rchtk ABG, grösser seye, als der gegebene Raum E.

4. Saz.

Fig. 57.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und der Ueberschuß des Quadrats der einen dieser Linien AC über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat; so berührt der Durchschnitts-Punkt C dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Fig. 57. a. b.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit ist. In diesem Fall wird der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren. Man nehme von dem Quadrat über AC den gegebenen Raum, nemlich das Rchtk CAD hinweg: so ist der Rest, d. i. das Rchtk ACD gleich dem Quadrat von BC. Also ist AC : BC = BC : CD, und der Winkel ABC gleich (6, 6. E.) dem Winkel BDC. Es seye das Rchtk BAE gleich dem gegebenen Raum CAD; so ist, weil AB gegeben ist, auch AE, mithin der Punkt E gegeben, und die Punkte B, C, D, E liegen auf dem Umfang eines Kreises. Also ist der Winkel BEC, oder sein Nebenwinkel gleich dem Winkel BDC (21, oder 22, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel ABC. Folglich sind die Linien BC, EC gleich; und, weil die Punkte B, E gegeben sind; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die nemlich aus der Mitte von BE senkrecht auf BE gezogen wird nach dem 1sten Fall des 2ten Sazes unsers IIten Buchs.

Kompo-

Komposition.

Es seye der gegebene Raum gleich dem Rchtk BAE, und man theile BE in F in zwey gleiche Theile, und errichte aus F das Perpendikel FG; so wird FG der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf der Linie FG die geraden Linien AC, BC zieht; so wird das Quadrat von AC um das gegebene Rchtk BAE grösser seyn, als das Quadrat von BC. Denn, weil das Quadrat von AC grösser ist, als das Quadrat von AF; so ist es noch vielmehr (6, 2. E.) grösser, als das Rchtk BAE. Wenn man also auf der Linie AC den Punkt D so bestimmt, daß das Rchtk CAD gleich wird dem Rchtk BAE; so fällt der Punkt D zwischen A und C, und nun muß bewiesen werden, daß, das Rchtk CAD von dem Quadrat über AC hinweg genommen, der Rest, d. i. das Rchtk ACD gleich seye dem Quadrat über BC. Man ziehe zu dieser Absicht die Linien BD, CE; weil nun die Rchtke BAE, CAD gleich sind; so liegen die Punkte B, D, C, E auf dem Umfang eines Kreises; also ist der Winkel BDC gleich (dem Winkel BEC, oder seinem Nebenwinkel, d. i. weil CB = CE, gleich) dem Winkel CBA; folglich sind die Dreyeke ABC, BDC gleichwinklicht, mithin das Rchtk ACD gleich dem Quadrat über BC.

Der Ort ist in diesem Fall völlig einerley mit dem Ort im 1sten Saz dieses IIten Buchs. Ich fügte aber diese Auflösung bey wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Auflösung des 2ten Falls. Uebrigens ist es wirklich wahrscheinlich, daß dieser Fall erst von jüngern Mathematikern von dem folgenden 2ten Fall getrennt, und als der erste Ort des IIten Buchs geordnet worden seye, da hingegen bey den ältern derjenige Ort, welcher jezt der 2te ist, der 1ste war, wie man aus Pappus im 119ten Saz des 7ten Buchs sieht; denn unmittelbar vor diesem Saz

stehen

stehen die Worte: „Ebener Oerter IItes Buch. Lehnsaz zum 1sten Ort des IIten Buchs.“ Nun sieht man aber leicht, daß dieser 119te Saz ein Lehnsaz für den Ort seye, den Pappus in der Vorrede zu seinem 7ten Buch als den 2ten anführt. Der folgende 120ste Saz hat die Ueberschrift: „zum 2ten Ort,“ und der darauf folgende 121ste Saz ist überschrieben: „zu eben dem Ort, wenn das Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit ist.“ Es ist aber der 120ste Saz ein Lehnsaz für den Ort, der bey Pappus in seiner Vorrede zum 7ten Buch der 1ste Ort des IIten Buchs heißt, und der andere, nemlich der 121ste Saz kann blos zu dem Ort gebraucht werden, welcher in dieser Vorrede als der 4te gezählt wird. Es ist also sichtbar, daß bey den Alten der 2te Ort aus den beyden zusammen bestanden habe, von denen jezt nach Pappus der eine als der 1ste, der andere als der 4te gezählt wird. Ueberdiß konnte Apollonius, nachdem er den Ort der Durchschnitts-Punkte von zwey geraden Linien betrachtet hatte, welche aus zwey gegebenen Punkten gezogen werden, und welche selbst, folglich auch deren Quadrate ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, nach dieser Betrachtung konnte er sehr schiklich den Ort des Durchschnitts-Punkts von geraden Linien beifügen, welche aus zwey gegebenen Punkten gezogen werden, und bey welchen der Ueberschuß des Quadrats der einen über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat. Der bey Pappus vorkommende 4te Lehnsaz ist ohne Zweiffel aus seiner rechten Stelle verrükt worden, denn es wird sich in dem Verfolg unsers gegenwärtigen Sazes deutlich zeigen, daß der 5te und 6te Lehnsaz bey Pappus für eben diesen unsern Ort anwendbar seyen, wie der 2te und 3te. Ferner scheint unser jeziger 5ter Saz bey den Alten der 3te, dagegen der, welcher jezt der 3te ist, der 4te gewesen zu seyn. Denn

von

von diesem lezteren hängt der Ort, welcher jezt der 6te ist, d. i. bey den Alten der 5te, gänzlich ab.

Figg. 57. c. d. e. f. g. h.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht das Verhältniß der Gleichheit ist. In diesem Fall wird der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühren. Denn es seye der gegebene Raum gleich dem Rchtk CAD; so ist das Verhältniß des Rests, nemlich des Rchtks ACD zu dem Quadrat über BC gegeben. Es seye auf der Linie AB, AE zu EB in diesem Verhältniß, und zwar seye der Punkt E auf der Verlängerung von AB. Weil nun AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so ist AE, mithin der Punkt E gegeben; man ziehe BD, CE; so ist nach dem 3ten Lehnsaz der Winkel BDC oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel BCE. Das Rchtk CAD aber ist entweder gleich, oder nicht gleich dem Quadrat über AB. Es seye 1) (Fig. 57. c. d.) diesem Quadrat gleich; so berührt die Linie AB den um das Dreyek BCD beschriebenen Kreis (37, 3. E.); also ist der Winkel EBC gleich dem Winkel BDC, oder seinem Nebenwinkel BDA (32, 3. E.), d. i. in beyden Fällen gleich dem Winkel BCE; folglich ist EC gleich der der Grösse nach gegebenen geraden Linie EB; und, weil der Punkt E gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz des Isten Buchs. Es seye 2) (Fig. 57. e. f. g. h.) das Rchtk CAD grösser oder kleiner als das Quadrat über AB, und das Rchtk BAF seye gleich dem Rchtk CAD. Weil nun AB gegeben ist; so ist AF, mithin der Punkt F gegeben. Es liegen aber die Punkte B, F, D, C auf dem Umfang eines Kreises, weil besagte Rchtke gleich sind: wenn man also CF zieht, so ist der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC oder dem

Winkel

Winkel BDA, d. i. in beyden Fällen gleich dem Winkel BCE. Es sind also die Dreyeke FEC, CEB gleichwinklicht; folglich ist das Quadrat über EC gleich dem Rchtk FEB. Das Rchtk FEB aber ist gegeben, mithin ist das Quadrat über EC, also EC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt E gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Es seye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen Raum, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem gegebenen Verhältniß. Ist nun diß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von B hin: ists aber das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so fällt der Punkt E auf die Verlängerung von AB nach der Seite von A hin. Wenn nun 1) (Fig. 57. c. d.) der gegebene Raum gleich ist dem Quadrat über AB, d. i. wenn der Punkt F auf B fällt; so beschreibe man aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EB einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C auf dem Umfang dieses Kreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Quadrat von AB zu dem Quadrat von BC das Verhältniß von AE zu EB haben. Denn man ziehe EC, weil nun AC grösser ist als AB (8, oder 7, 3. E.); so fällt, wenn man das Rchtk CAD gleich nimmt dem Quadrat über AB, der Punkt D zwischen A und C. Man ziehe BD; so berührt die gerade Linie AB den um das Dreyek BCD beschriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC, oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel EBC

(32,

(32, 3. E.), d. i. gleich dem gegebenen Winkel ECB. Folglich verhält sich nach dem 1ten Lehnsaz das Rchtk ACD, d. i. der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Rchtk CAD zu dem Quadrat von BC wie AE zu BE.

Es seye nun 2) (Fig. 57. e. f. g. h.) das Rchtk BAF, oder der gegebene Raum grösser oder kleiner, als das Quadrat über AB. Nun wird erfodert, daß die Punkte B, D, C, F auf dem Umfang eines Kreises liegen, und zwar so, daß man (in dem Fall, wenn der Punkt E auf der nach B hin verlängerten Linie AB liegt, d. h. wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern ist) daraus beweisen könne, es seye der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC, weil sie nemlich entweder in dem nemlichen Kreis-Abschnitt liegen, oder der eine von ihnen dem andern als einem äussern Winkel des Vierekes BDCF gegen über steht. Diß kann aber in dem eben angeführten Fall nicht geschehen, ausser, wenn der Punkt F zwischen die Punkte A und E fällt. Denn man seze, F falle über den Punkt E hinaus, z. B. in f (Fig. 57. f.); so wären die Winkel EfC, BDC innere gegen über stehende Winkel eines in einen Kreis beschriebenen Viereks; mithin könnte man nicht zeigen, daß sie gleich seyen. Es muß also der Punkt F nothwendig zwischen A und E fallen, also das Rchtk BAF kleiner seyn, als das Rchtk BAE. Und diß ist die Bestimmung, die Pappus in dem vorhergehenden 4ten Lehnsaz auf eine andere Art bewiesen hat, für den Fall nemlich, wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern ist. Denn im andern Fall hat der gegebene Raum keine Bestimmung, er kann grösser oder kleiner seyn, als jeder gegebene Raum.

Es seye also in dem eben erwähnten Fall das gegebene Rchtk BAF kleiner, als das Rchtk BAE, und man

finde zwischen EB, EF die mittlere Proportionallinie EG, und beschreibe aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A, B an irgend einen Punkt C dieses Umfanges die geraden Linien AC, BC zieht; so wird der Ueberschuß des Quadrats von AC über das gegebene Rchtk BAF zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von AE zu EB haben. Denn man ziehe EC, FC; weil nun nach der Verzeichnung das Rchtk BEF gleich ist dem Quadrat über EG, d. i. dem Quadrat über EC; so berührt die gerade Linie EC den um das Dreyek BCF beschriebenen Kreis (37, 3. E.); und, weil der Punkt A ausserhalb dieses Kreises auf eben der Seite der Berührungslinie EC liegt, auf welcher der Kreis ist; so muß die gerade Linie AC diesem Kreis noch einmahl zwischen den Punkten A und C begegnen (16, 3. E.). Es geschehe diß in D, und man ziehe die gerade Linie BD; so ist folglich das Rchtk CAD gleich dem Rchtk BAF; nimmt man diß Rchtk CAD von dem Quadrat über AC hinweg; so bleibt noch das Rchtk ACD übrig. Und, weil die Punkte B, C, D, F auf dem Umfang eines Kreises liegen; so ist der Winkel BDC, oder sein Nebenwinkel BDA gleich dem Winkel EFC, d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyeke BEC, CEF (6, 6. E.) gleich dem Winkel BCE. Also verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, wie AE zu EB. Es ist aber ACD der Ueberschuß des Quadrats von AC über den gegebenen Raum, nemlich über das Rchtk BAF.

Fig. 57. i.

Nun ist noch übrig, eben dieses auch von den Punkten zu erweisen, in welchen der Ort der geraden Linie AB

AB begegnet, d. i. wenn AE zu EB das gegebene Verhältniß, das Rchtk BAF der gegebene Raum, und EG die mittlere Proportional-Linie zwischen EB und EF ist; so muß bewiesen werden, daß der Ueberschuß des Quadrats von AG über das Rchtk BAF sich zu dem Quadrat von BG verhalte, wie AE zu EB.

Man nehme GH = GB; weil nun FE, GE, BE proportional sind; so ist [in der 1sten und 5ten Linie bey Fig. 57. i. nach 19, 5. E. und getheilt (dividendo); in der 3ten und 6ten Linie nach 19, 5. E. und verkehrt getheilt (dividendo inverse); *) in der 2ten, 4ten, 7ten, 8ten Linie nach 12, 5. E. und zusammen gesezt (componendo)] FH : BG = BG : BE. Also ist das Quadrat über BG gleich dem Rchtk BE×FH; und, weil BG, GH gleich sind; so ist in der 1sten, 2ten, 3ten und 4ten Linie das Quadrat über AG gleich (der Summe des Rchtks BAH, und des Quadrats über BG (6, 2. E.), d. i. gleich der Summe der Rchtke BAF, BA×FH, und BE×FH, d. i. gleich) der Summe der Rchtke BAF, und AE×FH. Und in der 5ten, 6ten, 7ten, 8ten Linie ist (weil das Quadrat von BG gleich ist dem Rchtk BE×FH, d. i. (1, 2. E.) der Summe der Rchtke EA×FH, und AB×FH), wenn man in der 5ten Linie das Rchtk BAH auf beyden Seiten hinzu sezt, und in der 6ten, 7ten, 8ten Linie dasselbe von beyden Seiten hinweg nimmt; ebenfalls (6, 5, 2. E.) das Quadrat über AG gleich der Summe der Rchtke BAF und AE×FH. Es ist also das Rchtk AE×FH der Ueberschuß des Quadrats von AG über das Rchtk BAF; und dieses Rchtk AE×FH verhält sich zu dem Quadrat über BG, d. i. zu dem Rchtk BE×FH wie AE zu EB, welches zu erweisen war.

*) d. i. wenn man schließt: wie sich der Ueberschuß des 2ten Glieds über das 1ste zum 2ten Glied verhält, so verhält sich der Ueberschuß des 4ten über das 3te zum 4ten.

Pappus erweist das nemliche für die zwey Fälle der 1sten und 2ten Linie in dem 123sten und 124sten Saz seines 7ten Buchs, und diese beyden Säze wollen wir doch hier auch her sezen, theils, damit man nichts von dem vermisse, womit dieser treffliche Geometer diese unsere Bücher erläutert hat, theils um deutlich zu zeigen, wohin diese Lehnsäze eigentlich gehören, und für welchen Saz sie brauchbar seyen, welches wirklich die Mathematiker seit Pappus Zeiten nicht recht gewußt zu haben scheinen.

123ster Saz des 7ten Buchs von Pappus mathematischen Sammlungen 235. Bl. nach der Ausgabe vom Jahr 1588, welcher aber sein 4ter, nicht, wie bey Kommandin der 5te Lehnsaz seyn muß.

Fig. 57. k.

Wenn AB zu BC ein gegebenes Verhältniß hat, und der Raum CAD gegeben ist, und, wenn BE zwischen DB, BC die mittlere Proportionallinie ist; so soll bewiesen werden, daß der Ueberschuß des Quadrats von AE über das gegebene Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das gegebene Verhältniß von AB zu BC habe.

Man nehme FE zu EC in demselben Verhältniß, welches AB zu BC hat; so ist wegen dieses Verhältnisses, und getheilt AC : CB = FC : CE, folglich verhält sich auch die ganze Linie AF zu der ganzen Linie BE, wie AC zu CB, und verwechselt ist also AF : AC = BE : CB. Es ist aber BE : CB = DE : EC, weil nemlich BE die mittlere Proportionallinie ist. Es ist also AF : AC DE : EC; folglich das Rchtk AF × EC = AC × DE. Es ist aber der Ueberschuß des Rchtks AF × EC über das Rchtk AEC gleich dem Rchtk FEC, also ist auch der Ueberschuß des Rchtks AC × DE über das Rchtk AEC gleich dem Rchtk FEC. Nun ist der Ueberschuß des Rchtks

Rchtks AC×DE über das Rchtk AEC gleich dem Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD. *) Mithin ist das Quadrat über AE um das Rchtk FEC grösser, als das Rchtk CAD. Es verhält sich aber das Rchtk FEC zu dem Quadrat über EC wie FE zu EC, d. i. wie AB zu BC. Folglich hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das Verhältniß von AB zu BC.

124ster Saz des 7ten Buchs von Pappus Sammlungen, d. i. sein 5ter, nicht, wie bey Kommandin, 6ter Lehnsaz.

Fig. 57. I.

Wenn AB zu BC ein gegebenes Verhältniß hat, und der Raum CAD gegeben ist, und wenn BE die mittlere Proportionallinie zwischen DB, BC ist; so hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD zu dem Quadrat über EC das gegebene Verhältniß von AB zu BC. Man nehme FE zu EC in demselben Verhältniß, welches AB zu BC hat; so ist, getheilt, FC : CE = AC : CB, mithin verhält sich auch der Rest FA zum Rest BE wie AC zu CB, und, verwechselt, ist FA : AC = BE : CB. Es ist aber BE : CB = DE : EC, weil BE die mittlere Proportionallinie zwischen DB und BC ist. Mithin ist FA : AC = DE : EC, also das Rchtk AC×DE gleich dem Rchtk FA×EC. Man seze noch beyderseits die beyden Rchtke AEC und CAD hinzu; so ist das Ganze, nemlich das Quadrat über AE gleich dem andern Ganzen, nemlich der Summe der Rchtke FEC und CAD. Es verhält sich aber das Rchtk FEC zu dem Quadrat über EC, wie AB zu BC. Folglich hat

*) Denn es ist die Summe der Rchtke AC×DE und CAD gleich (dem Rchtk CAE, d. i.) der Summe des Quadrats von AE, und des Rchtks AEC.

hat der Ueberschuß des Quadrats von AE über das Rchtk CAD zu dem Quadrat von EC das Verhältniß von AB zu BC.

Berechnung.

Es seye der gegebene Raum $= \mathfrak{R}$; $AB = a$; das Verhältniß, welches der Ueberschuß des Quadrats von AC über den gegebenen Raum zu dem Quadrat von BC hat, $= \beta : 1$; so ist in dem

Fig. 57. a. b.

1sten Fall $\beta = 1$; $BA \times AE = \mathfrak{R}$, also $AE = \frac{\mathfrak{R}}{a}$,

$BE = \pm \left(a - \frac{\mathfrak{R}}{a}\right) = \pm \left(\frac{a^2 - \mathfrak{R}}{a}\right)$; $BF = \frac{1}{2} BE$

$= \frac{\pm (a^2 - \mathfrak{R})}{2a}$.

Fig. 57. c. d.

Für den 2ten Fall 1, ist $\mathfrak{R} = a^2$, und $AE : BE = \beta : 1$, folglich

$$\left.\begin{matrix} \pm (AE - BE) \\ AB \\ a \end{matrix}\right\} : BE = \pm (\beta - 1) : 1, \text{ mithin}$$

$BE = \pm \frac{a}{\beta - 1}$; $AE = \pm \frac{\beta a}{\beta - 1}$;

Fig. 57. e. f. g. h.

Endlich ist für den 2ten Fall 2. $BA \times AF = \mathfrak{R}$, und völlig wie vorhin $BE = \pm \frac{a}{\beta - 1}$; $AE = \pm \frac{\beta a}{\beta - 1}$, folglich

EF

$$EF = AE \mp AF = \pm \frac{\beta a}{\beta - 1} \mp \frac{\mathfrak{R}}{a}, \text{ mithin}$$

$$EG = \sqrt{EB \times EF} = \sqrt{\left(\pm \frac{\beta a}{\beta - 1} \mp \frac{\mathfrak{R}}{a}\right) \times \left(\pm \frac{a}{\beta - 1}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\beta a^2 - (\beta - 1)\mathfrak{R}}{\pm(\beta - 1)a}\right)\left(\frac{a}{\pm(\beta - 1)}\right)} = \sqrt{\frac{(\beta a^2 - (\beta - 1)\mathfrak{R})}{\beta - 1}}.$$

Fermat meynt,*) Pappus habe hier einen dem vorigen ähnlichen Saz ausgelassen, nemlich diesen:

Wenn aus zwey Punkten zwey gerade Linien an einen dritten Punkt hin gezogen werden, und die Summe des Quadrats der einen und eines gegebenen Raums zu dem Quadrat der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Durchschnitts-Punkt dieser geraden Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Allein Apollonius wußte sehr wohl, daß dieser Ort wirklich in dem vorhergehenden schon enthalten seye. Denn, wenn die Summe einer gewissen Grösse und einer gegebenen Grösse zu einer andern Grösse ein gegebenes Verhältniß hat, so hat auch umgekehrt der Ueberschuß dieser andern Grösse über eine gegebene Grösse zu der erstern Grösse ein gegebenes Verhältniß (14. D.). Und deßwegen hat auch Euklid, dessen Data viele Säze von solchen Grössen enthalten, deren Ueberschuß über eine gegebene Grösse zu einer andern Grösse ein gegebenes Verhältniß hat, doch keinen, bey welchem ihre und einer gegebenen Grösse Summe zu einer andern ein gegebenes Verhältniß hat, weil nemlich diese leztern Säze schon in jenen erstern enthalten sind. Sonst könnte man freilich auch diesen Saz auf eine ähnliche Art wie den vorhergehenden, ohne Hülfe dieses Lehnsazes beweisen, wie Fermat am angeführten Ort gezeigt hat.

*) Fermatii varia Opera Mathem. p. 33.

Uebrigens giebt es noch einen dritten diesen beyden ähnlichen Ort, der auch eine ähnliche Auflösung hat, und von diesem sagt weder Fermat noch Schooten etwas. Inzwischen ist er doch eben so nüzlich, als diese beyden, und kann auf keinen derselben zurük gebracht werden. Es ist nemlich folgender

Saz A.

Fig. 58. a. b. c.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A und B zwey gerade Linien AC, BC an einen dritten Punkt C hin gezogen werden, und wenn die Summe des Quadrats der einen AC und eines Raums, zu welchem das Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist: so berührt der Durchschnitts-Punkt C dieser beyden Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn es seye der gegebene Raum gleich dem Rchtk CAD, d. i. gleich der Summe des Quadrats über AC, und des Rchtks ACD; so ist nach der Voraussezung das Verhältniß des Rchtks ACD zu dem Quadrat über BC gegeben. Man nehme auf der Linie AB den Punkt E so, daß AE zu EB dieses Verhältniß habe; weil nun AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so ist AE und der Punkt E gegeben. Man ziehe BD, CE; so ist nach dem 3ten Lehnsaz der Winkel BDC gleich dem Winkel BCE. Das Rchtk CAD aber ist entweder gleich, oder nicht gleich dem Quadrat über AB. Es seye 1) diesem (Fig. 58. a.) Quadrat gleich; so berührt die gerade Linie AB den um das Dreyeck BDC beschriebenen Kreis in dem Punkt B (37, 3. E.), also ist der Winkel EBC gleich dem Winkel BDC (32, 3. E.), d. i. gleich dem Winkel BCE; folglich ist EC = EB; nun ist EB und der Punkt E gegeben; mithin berührt der Punkt C einen

einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs. Es seye 2) (Fig. 58. b. c.) das Rchtk CAD grösser oder kleiner als das Quadrat über AB, und das Rchtk BAF seye gleich dem Rchtk CAD. Weil nun BA gegeben ist; so ist auch AF, und der Punkt F gegeben. Und, weil die Rchtke BAF, CAD gleich sind; so liegen die Punkte B, F, D, C auf dem Umfang eines Kreises. Man ziehe CF; so ist der Winkel EFC gleich dem Winkel BDC, d. i. gleich dem Winkel BCE, mithin sind die Dreyeke FEC, CEB gleichwinklicht, also ist das Quadrat über EC gleich dem Rchtk FEB. Es ist aber das Rchtk FEB gegeben, mithin ist auch das Quadrat über EC, folglich EC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt E gegeben ist, so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz des Isten Buchs.

Komposition.

Es seye das Rchtk BAF gleich dem gegebenen Raum, und das Verhältniß von AE zu EB gleich dem gegebenen Verhältniß. Wenn nun 1) (Fig. 58. a.) der gegebene Raum gleich ist dem Quadrat über AB, d. i. wenn der Punkt F auf B fällt, so beschreibe man aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EB einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A und B an irgend einen Punkt C dieses Kreises hin die gerade Linie AC, BC zieht; so wird die Summe des Quadrats über AC und einer Grösse, zu welcher das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von EB zu AE hat, gleich seyn dem Quadrat über AB. Denn man ziehe EC, weil nun AC kleiner ist als AB (7, oder 8, 3. E.); so fällt, wenn man das Rchtk CAD gleich macht dem Quadrat über AB, der Punkt D auf die Verlängerung von AC nach der Seite

 von

von C hin. Man ziehe BD; so wird die gerade Linie AB den um das Dreyek DBC beschriebenen Kreis in dem Punkt B berühren (37, 3. E.); also ist der Winkel BDC gleich dem Winkel EBC (32, 3. E.), d. i. dem Winkel ECB. Folglich verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC wie AE zu BE. Und es ist die Summe des Quadrats über AC und des Rchtks ACD gleich dem Rchtk CAD, d. i. gleich dem Quadrat über AB. Es seye 2) (Fig. 58. b. c.) das Rchtk BAF grösser oder kleiner, als das Quadrat über AB. Nun wird (nach der Analyse) erfodert, daß die Punkte B, C, D, F auf dem Umfang eines Kreises liegen, und zwar so, daß man daraus beweisen könne, der Winkel EFC seye gleich dem Winkel BDC. Diß kann aber nicht geschehen, wenn nicht der Punkt F auf der Verlängerung von AE nach der Seite von E hin liegt; denn gesezt, dieser Punkt läge (Fig. 58. b.) zwischen A und E z. B. in f; so wären die Winkel EfC, BDC gegen über stehende Winkel eines in einem Kreis beschriebenen Viereks: man könnte folglich nicht beweisen, daß sie gleich seyen; mithin muß der Punkt F nothwendig auf die Verlängerung von AE nach der Seite von E hin fallen, also muß das gegebene Rchtk BAF grösser seyn, als das Rchtk BAE, welches auch noch auf eine andere Art vermittelst des folgenden Lehnsazes erwiesen werden kann.

5. Lehnsaz.

Fig. 58. d.

Wenn in einem Dreyek ABC die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, zu welchem das Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben, z. B. gleich ist dem gegebenen Rchtk CAD; und wenn das gegebene Verhältniß (des Quadrats zu dem

dem Raum) gleich ist dem Verhältniß von EB zu AE, und der Punkt E zwischen den Punkten A und B liegt: so ist das Rchtk CAD grösser, als das Rchtk BAE.

Man trage aus dem Punkt A gegen B hin die Linie AF, so, daß das Rchtk BAF gleich seye dem Rchtk CAD. Und das Rchtk BCG mache man gleich dem Rchtk ACD. Weil nun die Summe des Quadrats über AC und des Rchtks ACD gleich ist dem gegebenen Raum CAD; so ist das Rchtk ACD, d. i. das Rchtk BCG der Raum, zu welchem das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von EB zu AE hat. Es verhält sich aber das Rchtk BCG zu dem Quadrat über BC, wie CG zu BC. Folglich ist GC : BC = AE : EB; man ziehe die Linien AG, CE, so sind mithin diese gleichlauffend; also der Winkel ECB gleich dem Winkel AGB, d. i. gleich dem Winkel ADB, denn die Punkte A, G, D, B liegen auf dem Umfang eines Kreises, weil die Rchtke ACD, GCB gleich sind. Und, weil die Rchtke CAD, BAF gleich sind; so liegen die Punkte B, F, C, D auf dem Umfang eines Kreises. Also ist der Winkel ACF gleich dem Winkel FBD; es ist aber der Winkel FBD grösser, als der Winkel CBD, d. i. grösser, als der Winkel GAD, d. i. grösser, als der Winkel ACE. Mithin ist der Winkel ACF grösser, als der Winkel ACE, also AF grösser als AE; folglich das Rchtk BAF oder CAD grösser als das Rchtk BAE.

Es seye also (Fig. 58. b. c.) der gegebene Raum, nemlich das Rechtek BAF grösser, als das Rechtek BAE, und man finde zwischen EB und EF die mittlere Proportional-Linie EG. Aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EG beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den Punkten A und B an irgend einen Punkt C dieses Kreises die geraden Linien AC, BC zieht; so wird die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, zu welchem das Quadrat über BC das gegebene Verhältniß

von

von EB zu AE hat, gleich seyn dem gegebenen Rchtk BAF. Denn, man ziehe EC, FC; weil nun nach der Verzeichnung das Rchtk BEF gleich ist dem Quadrat über EG, d. i. dem Quadrat über EC; so berührt die gerade Linie EC den um das Dreyek BCF beschriebenen Kreis (37, 3. E.). Und, weil der Punkt A ausserhalb des Kreises, und zwar nicht auf derselben Seite der Berührungs-Linie EC liegt, auf welcher der Kreis ist; so muß AC nach C hin verlängert dem Kreis noch in einem Punkt begegnen. Sie begegne ihm in D, und man ziehe BD; so ist folglich das Rchtk CAD gleich dem Rchtk BAF. Es ist aber das Rchtek CAD gleich der Summe des Quadrats über AC, und des Rechteks ACD. Folglich muß jezt nur noch bewiesen werden, daß das Rchtk ACD sich zu dem Quadrat über BC verhalte, wie AE zu EB. Und diß ist wirklich so, denn weil die Punkte B, D, C, F auf dem Umfang eines Kreises liegen: so ist der Winkel BDC gleich dem Winkel (EFC, d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyeke BEC, CEF gleich dem Winkel) BCE. Also verhält sich nach dem 3ten Lehnsaz das Rchtk ACD zu dem Quadrat über BC, wie AE zu EB.

Nun muß eben dieses auch noch von den Punkten erwiesen werden, in welchen der Ort der geraden Linie AB begegnet, d. i. wenn (Fig. 58. e.) AE zu EB das gegebene Verhältniß, das Rechtek BAF der gegebene Raum, und EG die mittlere Proportional-Linie zwischen EB und EF ist; so muß bewiesen werden, daß derjenige Raum, welcher mit dem Quadrat über AG zusammen genommen gleich ist dem Rechtek BAF, daß, sage ich, dieser Raum sich zu dem Quadrat über BG verhalte, wie AE zu EB. Man nehme GH = GB, weil nun die Linien EF, EG, EB proportional sind; so ist [in der 1sten Linie Fig. 58. e. nach 19, 5. E. und getheilt (dividendo), in der 2ten nach 19, 5. E. und

ver-

verkehrt getheilt (dividendo inverse), in der 3ten und 4ten nach 12, 5. E. und zusammen gesezt (componendo)] HF : BG = BG : EB. Also ist das Quadrat über BG gleich dem Rechtek EB × HF. Und, weil BG GH; so ist in den Fällen, in welchen der Punkt H zwischen A und F fällt, das Rchtk BAF gleich (der Summe der Rechteke BAH und AB × HF, d. i. gleich der Summe der Rechteke BAH, EB × HF und EA × HF; d. i. gleich der Summe der Rechteke BAH, EA × HF, und des Quadrats über BG; d. i. 6, 2. E.) der Summe des Quadrats über AG und des Rechteks EA × HF. In den Fällen aber, in welchen der Punkt H auf der Verlängerung von FA nach der Seite von A hin liegt, ist das Rechtek AB × HF gleich (der Summe der Rechteke AE × HF, und EB × HF; d. i. gleich) der Summe des Rechteks AE × HF, und des Quadrats über BG. Man nehme das gemeinschaftliche Rechtek BAH hinweg; so ist der Rest auf der einen Seite, nemlich das Rechtek BAF gleich dem Rest auf der andern Seite, d. i. gleich der Summe des Rechteks AE × HF und des Quadrats über AG (5, 2. E.). Also ist das Rechtek AE × HF derjenige Raum, der mit dem Quadrat über AG zusammen genommen gleich ist dem gegebenen Rechtek BAF. Es verhält sich aber das Rechtek AE × HF zu dem Quadrat über BG, d. i. zu dem Rechtek EB × HF wie AE zu EB.

Uebrigens ist dieser Ort in dem Fall, wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit ist, einerley mit dem 1sten Fall des nächst folgenden Orts im 5ten Saz.

Berechnung.

Fig. 58.

Es seye der gegebene Raum = ℜ; AB = a, und der Raum, welcher mit dem Quadrat über AC zusammen

men genommen gleich ist dem gegebenen Raum, verhalte sich zu dem Quadrat über BC, wie $\beta : 1$; so ist $BA \times AF = \mathfrak{R}$, also $AF = \frac{\mathfrak{R}}{a}$, und $AE : BE = \beta : 1$;

folglich $\left.\begin{matrix} AE + BE \\ AB \\ a \end{matrix}\right\} : BE = \beta + 1 : 1$, mithin ist

$BE = \frac{a}{\beta+1}$; $AE = \frac{\beta a}{\beta+1}$; $EF = AF - AE$

$= \frac{\mathfrak{R}}{a} - \frac{\beta a}{\beta+1} = \frac{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}{(\beta+1)a}$, folglich

$EG = \sqrt{EB \times EF} = \frac{\sqrt{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}}{\beta+1}$. Ist, wie im Anfang der Komposition angenommen wird, $\mathfrak{R} = a^2$; so wird $EG = EB = \frac{a}{\beta+1}$; ist $\beta = 1$; so wird $AE = BE = \frac{a}{2}$ und $EG = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathfrak{R} - a^2}$.

6. Lehnsaz.

Diß ist bey Pappus der 22ste Saz des 7ten Buchs, und sein 6ter, nicht, wie bey Kommandin 4ter Lehnsaz zum IIten Buch des Apollonius.

Fig. 59. a. b.

Wenn in einem Dreyek ABC eine durch den Scheitel gezogene gerade Linie AD die Grundlinie BC in dem Punkt D halbirt; so ist die Summe der Quadrate über AB und AC doppelt so groß als die Summe der Quadrate über DA, und DC.

Man

Man fälle das Perpendikel AE; so ist $BE^2 + EC^2 = 2 BD^2 + 2 DE^2$ (9, oder 10, 2. E.). Nun ist $2 AE^2 + 2 DE^2 = 2 AD^2$, und $BE^2 + EC^2 + 2 AE^2 = AB^2 + AC^2$ (47, 1. E.). Mithin ist $AB^2 + AC^2 = 2 AD^2 + 2 DB^2 = 2 AD^2 + 2 DC^2$.

7. Lehnsaz.

Fig. 60. a.

Bey Pappus der 125ste Saz seines 7ten Buchs, und sein 7ter Lehnsaz.

Wenn auf einer geraden Linie AB zwey Punkte C, D genommen werden, von welchen C zwischen den Punkten A, B liegt: so ist die Summe des Quadrats über AD und eines Raums, welcher sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AC zu CB, gleich der Summe des Quadrats über AC, eines Raums, welcher sich zu dem Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB, und noch eines Raums, welcher sich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu BC.

Man nehme FD : DB = AC : CB; so ist zusammen gesezt FB : DB = AB : BC, mithin auch der Rest AF : dem Rest CD = AB : BC, d. i. $AF \times CD : CD^2 = AB : BC$. Es ist also das Rechtek FDB derjenige Raum, welcher sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AC zu CB. Und, das Rechtek ACB ist derjenige Raum, welcher sich zu dem Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB. Endlich das Rechtek $AF \times CD$ derjenige Raum, welcher sich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu BC. Mithin ist der Saz, der bewiesen werden solle, dieser, die Summe des Quadrats über AD, und des Rechteks FDB seye gleich der Summe des Rechteks BAC und des Rechteks $AF \times CD$. Man nehme von beyden Seiten das Rechtek CAD hinweg; so ist also

also zu beweisen, daß der Rest, d. i. die Summe des Rechteks ADC und des Rechteks FDB gleich seye dem Rest auf der andern Seite, d. i. der Summe des Rechteks AC×DB und des Rechteks AF×CD. Man nehme auch noch das gemeinschaftliche Rechtek AF×CD hinweg; so muß also bewiesen werden, daß die Summe der Rechteke FDC und FDB, d. i. das Rechtek FD×CB gleich seye dem Rechtek AC×DB. Und diß ist nun wirklich so, weil die 4 Linien AC, CB, FD, DB unter sich proportional sind.

Diesen Beweis giebt Pappus selbst, und er dient für den Fall, wenn der Punkt D zwischen den Punkten C, B liegt; es kann aber D auch zwischen A, C, oder auf der Verlängerung von AB nach jeder Seite hin liegen. Diese vier Fälle nun würden, wenn man die Beweisart des Pappus bey dem ersten Fall auf alle anwenden wollte, vier verschiedene Beweise erfodern; man kann aber auf folgende Art für alle einerley Beweis brauchen.

Anderer und allgemeiner Beweis des vorhergehenden 7ten Lehnsazes.

Fig. 60. b. c. d. e.

Man beschreibe über AB einen Halbkreis, und errichte senkrecht auf AB die Linie CE, die dem Halbkreis in E begegne, man ziehe ferner die Linien AE, BE, und an BE ziehe man DF mit CE gleichlauffend, endlich ziehe man noch AF. Es ist also das Quadrat über DF derjenige Raum, der sich zum Quadrat über DB verhält wie (das Quadrat über EC zu dem Quadrat über CB, d. i. wie) AC zu CB. Und das Rechtek ACB ist derjenige Raum, der sich zum Quadrat über CB verhält, wie AC zu CB.

Endlich

Endlich ist das Quadrat über EF derjenige Raum, der sich zum Quadrat über DC verhält, wie (das Quadrat über EB zu dem Quadrat über CB, d. i. wie) AB zu BC. Mithin muß bewiesen werden, daß die Summe der Quadrate über AD, und DF gleich seye der Summe des Quadrats über AC, des Rechteks ACB und des Quadrats über EF, d. i. der Summe der Quadrate über AE, und EF. Und, daß diß wirklich so seye, erhellet leicht daraus, weil das Quadrat über AF so wohl der Summe der Quadrate über AD, DF, als auch der Summe der Quadrate über AE, EF gleich ist.

8. Lehnsaz.

Bey Pappus der 126ste Saz seines 7ten Buchs, und sein 8ter Lehnsaz.

Fig. 61.

Wenn auf einer der Lage und Grösse nach gegebenen geraden Linie AB ein Punkt C nach Belieben genommen wird; so wird auf dieser Linie AB ein Punkt gegeben seyn, so, daß die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über der zwischen dem gegebenen Punkt und dem Punkt C abgeschnittenen geraden Linie ein gegebenes Verhältniß hat.

Denn man nehme das Verhältniß von AD zu DB gleich dem gegebenen Verhältniß; so ist folglich das Verhältniß von AD zu DB, mithin der Punkt D gegeben. Weil also auf der geraden Linie AB zwey Punkte D, C genommen sind, so ist nach dem vorhergehenden Lehnsaz die Summe des Quadrats über AC und eines

Raums, der zu dem Quadrat über CB das gegebene Verhältniß von AD zu DB hat, gleich der Summe des Quadrats über AD, eines Raums, der sich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DB, und eines Raums, der zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat, d. i. gleich der Summe des gegebenen Rechteks BAD, und eines Raums, der zu dem Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu BD hat, welches gegeben ist.

9. Lehnsaz.

Fig. 62. a.

Wenn eine gerade Linie AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so wird ein Punkt gegeben seyn, der sie in 2 Stüke theilt, welche zu einer gegebenen geraden Linie gegebene Verhältnisse haben.

Es seye so, nemlich es seye C der Punkt, und CE die gerade Linie; so ist, nach der Voraussezung das Verhältniß von AC zu CE, und auch das Verhältniß von CB zu CE gegeben, mithin ist (9. D.) das Verhältniß von AC zu CB, also (7. D.) das Verhältniß von AB zu AC gegeben. Nun ist AB der Lage und Grösse nach gegeben, mithin auch AC, und der Punkt C; und, weil das Verhältniß von AC zu CE gegeben ist, so ist auch CE gegeben.

Komposition.

Es seye das gegebene Verhältniß, welches AC zu CE haben soll, gleich dem Verhältniß von R zu T; und das gegebene Verhältniß, welches CB zu CE haben soll, gleich dem Verhältniß von S zu T. Man theile die gerade Linie AB in dem Punkt C so, daß sich AC zu CB

ver-

verhält, wie R zu S, und nehme CE so, daß sich CB zu CE verhält, wie S zu T; so ist folglich, gleichförmig, AC : CE = R : T.

Fig. 62. b. c.

Zus. Und völlig auf die nemliche Art kann auf der nach beyden Seiten verlängerten Linie AB ein Punkt gefunden werden, so, daß die zwischen ihm und den Endpunkten von AB abgeschnittenen Stüke die gegebenen Verhältnisse von R zu T, und von S zu T haben. Ist das Verhältniß von R zu S, d. i. von AC zu CB das Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so muß der Punkt C auf der nach B hin verlängerten Linie AB; ist es aber das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so muß der Punkt C auf der nach A hin verlängerten Linie AB genommen werden.

(Diese lezte Bemerkung Simsons lehrt zugleich, daß für diesen Fall, wenn der Punkt C auf der Verlängerung von AB genommen werden soll, das Verhältniß von R zu S nicht das Verhältniß der Gleichheit seyn darf. Und wirklich, weil AC : CB = R : S genommen werden soll; so muß in diesem Fall entweder AC — CB oder CB — CA, d. h. immer AB zu CB in dem Verhältniß seyn, wie R — S zu S. Nun findet aber zwischen R — S und S kein Verhältniß statt, wenn R = S ist (4. Def. 5. E.), mithin auch nicht zwischen AB, und CB. Der Punkt C würde in eine unendliche Entfernung von B fallen, d. h. es giebt in diesem Fall keinen solchen Punkt C. Diese Bemerkung ist in der Folge nicht unwichtig. Anmerkung des Uebers.)

10. Lehnsaz.

Fig. 63. a.

Wenn in einem Dreyek ABC aus dem Scheitel an die Grundlinie AB irgend eine gerade Linie DC gezogen wird, und wenn DE irgend eine gerade Linie ist; so ist die Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AC verhält, wie BD zu DE, und eines Raums, der sich zum Quadrat über BC verhält, wie AD zu DE gleich der Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AD verhält, wie BD zu DE, und eines Raums, der sich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DE, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu DE.

Man nehme FC : CA = BD : DE, und GC : CB = AD : DE, und ergänze die Prllgrmme DHFK, DLGM, und auf AB fälle man das Perpendikel CN. Es ist also das Rechtek FCA derjenige Raum, der sich zum Quadrat über AC verhält, wie (FC zu CA, d. i. wie) BD zu DE; und das Rechtek GCB ist derjenige Raum, der sich zum Quadrat über CB verhält wie (GC zu CB, d. i. wie) AD zu DE. Ferner ist das Rechtek HDA derjenige Raum, der sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie (HD zu AD, d. i. wie FC zu CA, d. i. wie) BD zu DE; und das Rechtek LDB ist derjenige Raum, der sich zum Quadrat über DB verhält wie (LD zu DB, d. i. wie GC zu CB, d. i. wie) AD zu DE. Und, weil sich das Rechtek KCD zu dem Quadrat über CD verhält wie (KC zu CD, d. i. wie CF zu CA, d. i. wie) BD : DE; und das Rechtek MCD sich zu dem Quadrat über CD verhält, wie (MC zu CD, d. i. wie GC zu BC, d. i wie) AD zu DE; so verhält sich (24, 5. E.) die Summe der Rechteke KCD und MCD zu dem Quadrat über CD, wie AB zu DE. Der Saz,

den

den wir zu beweisen hätten, wäre also dieser, daß die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich seye der Summe der Rechteke HDA, LDB, KCD und MCD. Weil LD : DB = AD : DE; so ist verwechselt LD : DA = (DB : DE, d. i. = FC : CA =) DH : DA; mithin ist LD = DH. Und, wegen der Parallelen ist $FC \times CA : CA^2 = HD \times DA : DA^2 = KC \times CD : DC^2 = 2\,HD \times DN : 2\,AD \times DN$. Folglich ist (12, 5. E.) $FC \times CA : AC^2 = (HD \times DA + KC \times CD + 2\,HD \times DN) : (AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN)$. Es ist aber (12, 2. E.) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN$. Mithin ist $FC \times CA = HD \times DA + KC \times CD + 2\,HD \times DN$. Und, da (13, 2. E.) $BC^2 + 2\,BD \times DN = BD^2 + DC^2$; so wird auf ähnliche Art, wie vorhin bewiesen, daß $GC \times CB + 2\,LD \times DN = LD \times DB + MC \times CD$. Mithin ist $FC \times CA + GC \times CB + 2\,LD \times DN = HD \times DA + KC \times CD + LD \times DB + MC \times CD + 2\,HD \times DN$. Es ist aber $2\,LD \times DN = 2\,HD \times DN$. Folglich bleibt, diese gleichen Rechteke von beyden Seiten hinweg genommen, $FC \times CA + GC \times CB = HD \times DA + LD \times DB + KC \times CD + MC \times CD$.

Wenn so wohl BD : DE, als AD : DE das Verhältniß der Gleichheit ist; so ist dieser Lehnsaz einerley mit dem vorhergehenden 6ten Lehnsaz: ist aber nur eines dieser Verhältnisse, z. B. BD : DE das Verhältniß der Gleichheit; so kann der Saz in diesem Fall so ausgedrukt, und bewiesen werden:

Fig. 63. b.

Wenn aus dem Scheitel-Punkt C eines Dreyeks ABC an die Grundlinie eine gerade Linie CD gezogen wird; so wird die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, der sich zum Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB, gleich seyn der Summe des Quadrats über AD, eines Raums, der sich zum Quadrat über

DB verhält, wie AD zu DB, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD, d. i. jene erstere Summe wird gleich seyn der Summe des Rechteks BAD und eines Raums, der sich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Denn, man fälle auf AB das Perpendikel CN, und nehme GC : CB = AD : DB, und ergänze das Prllgrm. DLGM; so ist LD : DB = AD : DB, mithin AD = DL. Und das Rechtek GCB ist derjenige Raum, der sich zum Quadrat über BC verhält, wie (GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB. Ferner ist das Rechtek LDB oder ADB derjenige Raum, der sich zum Quadrat über DB verhält, wie AD zu DB. Und, weil sich das Rechtek MCD zu dem Quadrat über CD verhält, wie (MC zu CD, d. i. wie GC zu CB, d. i. wie) AD zu DB; so ist zusammen gesezt die Summe des Quadrats über CD und des Rechteks MCD zu dem Quadrat über CD in dem Verhältniß von AB zu BD. Mithin muß bewiesen werden, daß die Summe des Quadrats über AC und des Rechteks GCB gleich seye der Summe des Quadrats über AD, des Rechteks ADB, des Quadrats über CD, und des Rechteks MCD. Weil wegen der Parallelen $GC \times CB : CB^2 = 2\,LD \times DN : 2\,BD \times DN$ $= \left\{\begin{matrix} LD \times DB \\ AD \times DB \end{matrix}\right. : DB^2 = MC \times CD : CD^2$; und, weil (13, 2. E.) $CB^2 + 2\,BD \times DN = BD^2 + DC^2$; so ist (nach dem 2ten Lehns. unsers Isten Buchs) $GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD \times DB + MC \times CD$. Es ist aber (12, 2. E.) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN$. Mithin ist, auf beyden Seiten gleiches hinzu gesezt, $AC^2 + GC \times CB + 2\,LD \times DN = AD^2 + DC^2 + 2\,AD \times DN + AD \times DB + MC \times CD$. Und, weil $2\,LD \times DN = 2\,AD \times DN$; so ist, diese gleichen Rechteke von beyden Seiten hinweg genommen, der Rest, d. i. $AC^2 + GC \times CB$ = dem Rest auf der andern Seite, d. i.

$= AD^2$

$= AD^2 + AD \times DB + DC^2 + MC \times CD$, d. i.
$= BA \times AD + DC^2 + MC \times CD$.

Fig. 63. a.

Zus. Wenn also AB der Lage und Grösse nach gegeben ist, und wenn auch das Verhältniß des Rechteks FCA zu dem Quadrat über AC, und des Rechteks GCB zu dem Quadrat über BC gegeben ist; so ist (9. Lehns.) der Punkt D und die gerade Linie DE gegeben, welche von der Beschaffenheit sind, daß das Verhältniß von AD zu DE gleich ist dem gegebenen Verhältniß des Rechteks GCB zu dem Quadrat über BC; und das Verhältniß von BD zu DE gleich dem gegebenen Verhältniß des Rechteks FCA zu dem Quadrat über AC. Es sind also die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch ihre Quadrate, folglich auch die Rechteke HDA, LDB, welche zu diesen Quadraten gegebene Verhältnisse haben. Also ist die Summe der Rechteke FCA, GCB, d. i. der Räume, welche zu den Quadraten über AC, BC gegebene Verhältnisse haben, gleich der Summe eines gegebenen Raums (d. i. den beyden Rechteken HDA, LDB) und desjenigen Raums (d. i. der beyden Rechteke KCD, MCD), welcher zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu DE hat.

5. Saz.

Fig. 64.

Wenn aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte an einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden, und die Summe der über diesen geraden Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt ihr gemeinschaftlicher

licher Durchschnitts-Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

I. Fall. Wenn zwey Punkte gegeben sind.

1. Es seyen die über den geraden Linien beschriebenen Figuren Quadrate.

Fig. 64. a. b.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen werden, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn man ziehe die Linie AB, und theile sie in D in zwey gleiche Theile; so ist folglich der Punkt D gegeben. Man ziehe DC; so ist (6. Lehns.) die Summe der Quadrate über AC und BC gleich der doppelten Summe der Quadrate über CD und DA; es ist aber die Summe der Quadrate über AC und BC gegeben, mithin ist die Summe der Quadrate über AD und DC gegeben; es ist aber AD, also auch das Quadrat über AD, folglich auch das Quadrat über DC, mithin DC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt D gegeben ist, so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Weil man das doppelte Quadrat über AD, d. i. das Rechtek BAD von dem gegebenen Raum weg nehmen muß; so muß der gegebene Raum grösser seyn, als das Rechtek BAD. Es seye also der gegebene Raum gleich der Summe des Rechteks BAD und des doppelten Quadrats über DE; und man beschreibe aus dem

Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C desselben aus den Punkten A, B die geraden Linien AC, BC zieht; so wird die Summe der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich seyn der doppelten Summe der Quadrate über AD und DE, welches, wenn man noch die Linie DC zieht, aus dem 6ten Lehnsaz erhellet. Von den Punkten E aber, in welchen der Ort der geraden Linie AB begegnet, erhellt es aus 9, oder 10, 2. E., denn die Summe der Quadrate über AE, EB ist gleich der doppelten Summe der Quadrate über AD, DE.

2. Wenn die eine der über den geraden Linien beschriebenen Figuren ein Quadrat ist, die andere aber nicht.

Fig. 64. c.

Aus den gegebenen Punkten A, B seyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen, und es seye die Summe des Quadrats über AC und einer der Gattung nach gegebenen über BC beschriebenen Figur gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Denn man ziehe AB, und die über BC beschriebene Figur heisse b, weil nun diese der Gattung nach gegeben ist; so ist (53. D.) ihr Verhältniß zu dem Quadrat über BC gegeben. Man theile die Linie AB in dem Punkt D so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem Verhältniß der Figur b zu dem Quadrat über BC; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehnsazes die Summe des Quadrats über AC, und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAD, und eines Raums, der zum Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu BD, d. i. ein gegebenes Verhältniß hat. Dieser Raum heisse c. Nun

 ist

ist nach der Voraussezung die Summe des Quadrats über AC und der Figur b gegeben, mithin ist die Summe des Rechteks BAD und der Figur c gegeben. Und, weil das Rechtek BAD gegeben ist, so ist die Figur c gegeben. Es ist aber auch ihr Verhältniß zum Quadrat über DC gegeben, mithin ist das Quadrat über DC, folglich DC selbst der Grösse nach gegeben; und, weil der Punkt D gegeben ist, so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Man nehme irgend eine gerade Linie EF, und beschreibe über derselben eine Figur G, welcher die über BC zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll; und es seye EF die mit der Seite BC ähnlich liegende (homologe) Seite dieser Figur. Man ziehe ferner die Linie AB, und theile sie in D so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem Verhältniß der Figur G zu dem Quadrat über EF. Ueber EF beschreibe man das Quadrat H. Weil nun G : H = AD : DB, so ist, zusammen gesezt, G + H : H = AB : DB. Der gegebene Raum, dem die Summe des Quadrats über AC und der Figur über BC gleich seyn soll, seye M; so muß, wie man aus der Analyse sieht, M grösser seyn, als das Rechtek BAD. Es seye also M gleich der Summe des Rechteks BAD und des Raums N, und man finde (25, 6. E.) eine Figur c, die dem Raum N gleich, und der aus G und H zusammen gesezten Figur ähnlich seye. Auf der geraden Linie DA schneide man aus dem Punkt D eine Linie DK ab gleich derjenigen Seite der Figur c, welche mit EF ähnlich liegend ist, und aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DK beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn

wenn man an irgend einen Punkt C desselben die geraden Linien AC, BC zieht; so wird die Summe des Quadrats über AC und einer Figur b, welche der Figur G ähnlich über BC beschrieben wird, gleich seyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe DC, weil nun die über DK oder DC beschriebene Figur ähnlich ist der aus G und H zusammengesezten Figur, und weil DC, EF ähnlich liegende Seiten dieser ähnlichen Figuren sind; so ist $c : DC^2 = (G + H : \begin{cases} H \\ EF^2 \end{cases},$ d. i. $=)$ AB : BD. Und, weil die Figuren b und G ähnlich sind; so ist $b : BC^2 = (G : EF^2 =)$ AD : BD. Also ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über AC und der Figur b gleich der Summe des Rechtecks BAD und der Figur c (oder N), d. i. gleich dem gegebenen Raum M.

Unser gegenwärtiger Saz ist in diesem 2ten besondern Fall des Isten Haupt-Falls einerley mit dem Saz A dieses IIten Buchs. Denn es ist die Summe des Quadrats über AC und einer der Gattung nach gegebenen über BC beschriebenen Figur, d. i. die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, welcher zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben. Er kommt aber hier zum zweitenmahl vor, weil er ein besonderer Fall dieses 5ten Sazes ist, und mit den übrigen Fällen einen ähnlichen Beweis hat.

3. Wenn keine der Figuren ein Quadrat ist.

Fig. 64. d.

Es seyen aus den zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren seye gleich einem

nem gegebenen Raum: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Die über AC beschriebene Figur heisse a, die über BC beschriebene b; so ist (53. D.) das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AC, und das Verhältniß von b zu dem Quadrat über BC gegeben. Und, weil diese beyden Verhältnisse gegeben sind, und die gerade Linie AB der Lage und Grösse nach gegeben ist; so ist nach dem 9ten Lehns. auf der Linie AB ein Punkt gegeben, der sie in zwey Stüke theilt, welche zu einer gegebenen Linie diese gegebenen Verhältnisse haben. Dieser Punkt seye D, und die gegebene Linie seye DE, daß also BD sich zu DE verhalte, wie die Figur a zu dem Quadrat über AC, und AD sich zu DE verhalte, wie die Figur b zu dem Quadrat über BC. Man ziehe DC, und über AD seye eine der Figur a ähnliche Figur d, und über DB eine der Figur b ähnliche Figur e beschrieben; so ist folglich $d : AD^2 = a : AC^2$, d. i. $= BD : DE$; und eben so ist $e : DB^2 = AD : DE$. Folglich ist nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren a und b gleich der Summe der Figuren d und e und eines Raums, der sich zum Quadrat über DC verhält, wie AB zu DE. Dieser Raum seye die Figur f. Nun ist nach der Voraussezung die Summe der Figuren a und b gegeben, mithin ist auch die Summe der Figuren d, e, f gegeben. Es sind aber die Figuren d, e gegeben, weil sie zu den Quadraten über den gegebenen Linien AD, BD gegebene Verhältnisse haben; folglich ist die Figur f gegeben. Und, weil f zu dem Quadrat über DC ein gegebenes Verhältniß hat; so ist das Quadrat über DC, mithin DC selbst der Grösse nach gegeben. Da nun der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Ueber einerley geraden Linie GH seyen zwey Figuren K, L beschrieben, und K seye diejenige, welcher die über AC zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll, L diejenige, welcher die über BC zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll; in beyden Figuren K, L aber seye die Seite GH mit den Seiten AC, BC der ähnlichen Figuren ähnlich liegend. Und, nach dem 9ten Lehns. theile man AB in D, und finde die Linie DE, so, daß BD zu DE das Verhältniß der Figur K zu dem Quadrat über GH, und AD zu DE das Verhältniß der Figur L zu dem Quadrat über derselben Linie GH habe; so wird (24, 5. E.) die aus K und L zusammen gesezte Figur sich zu dem Quadrat über GH verhalten, wie AB zu DE. Ferner seye über AD eine der Figur K ähnliche Figur d, und über BD eine der Figur L ähnliche Figur e beschrieben. Und der gegebene Raum, dem die Summe der Figuren über AC, BC gleich seyn soll, seye M; so muß, wie man aus der Analyse weiß, M grösser seyn, als die Summe von d und e. Es seye also M gleich der Summe von d, e, und einem Raum N; und man finde (25, 6. E.) eine Figur f, die dem Raum N gleich, und der aus K, L zusammen gesezten Figur ähnlich seye, DO seye gleich derjenigen Seite der Figur f, die mit GH ähnlich liegend ist; und man beschreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DO einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C desselben die geraden Linien AC, BC zieht; so wird die Summe einer über AC beschriebenen Figur a, welche der Figur K ähnlich ist, und einer über BC beschriebenen Figur b, welche der Figur L ähnlich ist, gleich seyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe DC; weil nun die über DO oder DC beschriebene Figur f ähnlich ist der aus K

und

und L zusammen gesezten Figur; so verhält sich f zu dem Quadrat über DC, wie (die Summe von K und L zu dem Quadrat über GH, d. i. wie) AB zu DE; mithin ist nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren a und b gleich der Summe der Figuren d, e, und f, d. i. gleich der Summe der Figuren d, e, und N, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum M.

Wenn die Figuren a, b ähnlich sind, d. i. wenn sich a zu dem Quadrat über AC verhält, wie b zu dem Quadrat über BC; so kann man den Ort auf den Fall zurük bringen, in welchem die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind. Denn es hat (12, 5. E.) die Summe der Figuren a und b zu der Summe der Quadrate über AC, BC, das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AC, d. i. ein gegebenes Verhältniß; und nach der Voraussezung ist die Summe von a und b gleich einem gegebenen Raum; mithin ist die Summe der Quadrate über AC und BC gegeben. Also berührt der Punkt C nach nro. 1. dieses Isten Falls einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Und man findet den Raum, dem die Summe der Quadrate über AC, BC gleich ist, wenn man einen Raum N nimmt, der sich zu dem gegebenen Raum M verhält, wie das Quadrat über AC zu der Figur a; denn so ist, wie man leicht sieht, der Raum N gleich der Summe der Quadrate über AC, BC.

II. Fall. Wenn 3 Punkte gegeben sind.

1. Wenn die über den geraden Linien beschriebenen Figuren Quadrate sind.

Fig. 64. e.

Es seyen aus den drey gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, und die Summe aller über diesen Linien beschrie-

schriebenen Quadrate seye gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe die Linie DE, welche AB in 2 gleiche Theile theilt; so ist nach dem 6ten Lehns. die Summe der Quadrate über AD, BD gleich dem Rechtek BAE und dem doppelt genommenen Quadrat über ED; also ist die Summe der 3 Quadrate über AD, BD, CD gleich der Summe des Rechteks BAE, des doppelt genommenen Quadrats über ED, und des Quadrats über CD, d. i. wenn man die Linie EC zieht, und auf dieselbe das Perpendikel DF fällt, die Summe jener 3 Quadrate ist gleich der Summe des Rechteks BAE, des Quadrats über CF, des doppelt genommenen Quadrats über FE, und des 3fach genommenen Quadrats über DF. Und, weil das Verhältniß des doppelt genommenen Quadrats über FE zu dem Quadrat über FE gegeben ist; so ist nach dem 8ten Lehns. auf der Linie EC ein Punkt (nemlich der Punkt, der sie in G so theilt, daß CG doppelt so groß ist, als GE) gegeben, so, daß die Summe des Quadrats über CF und des doppelt genommenen Quadrats über FE gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, nemlich des Rechteks ECG, und eines Raums, der sich zum Quadrat über GF verhält, wie CE zu EG, d. i. so, daß jene erstere Summe gleich ist der Summe des Rechteks ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GF. Man nehme also CG doppelt so groß als GE; so ist die Summe der 3 Quadrate über AD, BD, CD gleich der Summe der gegebenen Rechteke BAE, ECG, und (der 3fach genommenen Summe der Quadrate über GF und FD, d. i.) des 3fach genommenen Quadrats über GD. Also ist die Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GD gegeben; und, weil die Rechteke BAE, ECG gegeben sind; so ist das 3fach genommene

Qua-

Quadrat über GD, mithin das Quadrat über GD selbst, folglich die gerade Linie GD gegeben, und, weil der Punkt G gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Man verbinde zwey der gegebenen Punkte, welche man will, durch die gerade Linie AB, theile diese in E in zwey gleiche Theile, ziehe EC, und theile diese in G so, daß CG doppelt so groß seye, als GE. Und, weil die Rechteke BAE, ECG von dem gegebenen Raum weggenommen werden müssen; so muß dieser Raum grösser seyn, als die Summe dieser beyden Rechteke. Es seye also der gegebene Raum gleich der Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GH, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GH einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht; so wird die Summe der 3 über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich seyn dem gegebenen Raum, d. i. der Summe der Rechteke BAE, ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GH. Denn man ziehe ED, DG und fälle auf EH das Perpendikel DF. Weil nun AB in E in zwey gleiche Theile getheilt ist; so ist nach dem 6ten Lehns. die Summe der Quadrate über BD, AD gleich der Summe des Rechteks BAE und des doppelt genommenen Quadrats über ED, d. i. gleich dem Rechtek BAE und der doppelt genommenen Summe der Quadrate über FE, FD; man seze das Quadrat über CD, oder die Summe der Quadrate über CF, FD hinzu; so ist die Summe der 3 Quadrate über CD, BD, AD gleich der Summe des Rechteks BAE, des Quadrats über

CF,

CF, des doppelt genommenen Quadrats über FE, und des 3fach genommenen Quadrats über FD. Nun ist nach dem 7ten Lehns. (weil nemlich CG doppelt so groß ist als GE) die Summe des Quadrats über CF und des doppelt genommenen Quadrats über FE gleich der Summe des Rechteks ECG und des 3fach genommenen Quadrats über GF. Also ist die Summe der 3 Quadrate über CD, BD, AD gleich der Summe der Rechteke BAE, ECG und (der 3fach genommenen Summe der Quadrate über GF, FD, d. i.) des 3fach genommenen Quadrats über GD oder GH, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum.

2. Wenn zwey der Figuren Quadrate sind, die dritte aber nicht.

Fig. 64. f.

Aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C seyen die Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe des über AD beschriebenen Quadrats, einer über BD beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figur, und des über CD beschriebenen Quadrats gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Figur über BD heisse b; weil nun diese der Gattung nach gegeben ist; so ist (53. D.) ihr Verhältniß zu dem Quadrat über BD gegeben. Man theile AB in E so, daß AE zu EB sich verhalte, wie die Figur b zu dem Quadrat über BD, und ziehe ED. Also ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über AD und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAE und einer Figur, die zum Quadrat über ED das Verhältniß von AB zu BE, mithin ein gegebenes Verhältniß hat. Diese Figur seye c, und man seze noch auf beyden Seiten das Quadrat

über CD hinzu; so ist die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe des Rechteks BAE, der Figur c, und des Quadrats über CD. Man ziehe EC, und theile sie in F, so, daß sich CF zu FE verhalte, wie die Figur c zu dem Quadrat über ED, d. i. wie AB zu BE, und ziehe FD. Es ist also wieder nach dem lezten Fall des 1 ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD und der Figur c gleich der Summe des Rechteks ECF, und einer Figur d, die sich zum Quadrat über FD verhält, wie CE zu EF. Mithin ist die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF und der Figur d. Nun ist die erste dieser Summen gegeben, mithin auch die zweyte. Es sind aber die Rechteke BAE, ECF gegeben, folglich auch die Figur d. Und, weil die Figur d zu dem Quadrat über FD das Verhältniß von CE zu EF, d. i. ein gegebenes Verhältniß hat; so ist das Quadrat über FD, mithin FD selbst gegeben, und, da der Punkt F gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Ueber irgend einer geraden Linie GH beschreibe man eine Figur K, welcher die über BD zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll, und es seye GH die mit der Seite BD der ähnlichen Figur ähnlich liegende Seite; man ziehe ferner die gerade Linie AB, und theile sie in E, so, daß AE sich zu EB verhalte, wie K zu dem Quadrat über GH. Weiter ziehe man die gerade Linie EC, und theile sie in F so, daß sich CF zu FE verhalte wie AB zu BE. Der Raum, dem die Summe des Quadrats über AD, der über BD beschriebenen der Figur K ähnlichen Figur, und des Quadrats über CD gleich seyn solle,

folle, seye M; so muß, wie man aus der Analyse weiß, M grösser seyn, als die Summe der Rechteke BAE, ECF. Es seye also M gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, und der Figur d, und es verhalte sich das Quadrat einer aus dem Punkt F abgeschnittenen Linie FO zu der Figur d wie EF zu CE; und aus dem Mittelpunkt F mit dem Halbmesser FO beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht, und über BD eine der Figur K ähnliche Figur b beschreibt; so wird die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich seyn dem gegebenen Raum M. Denn man ziehe ED und FD; und es seye c eine Figur, die sich zum Quadrat über ED verhält, wie CF zu FE, d. i. wie AB zu BE. Weil nun aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks CED die gerade Linie DF an die Grundlinie gezogen ist, und die Figur d sich zu dem Quadrat über FO oder FD verhält, wie CE zu EF; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehrs. die Summe des Quadrats über CD und der Figur c, gleich der Summe des Rechteks ECF und der Figur d. Und, weil die Figuren b und K ähnlich sind; so verhält sich b zu dem Quadrat über BD wie (K zu dem Quadrat über GH, d. i. wie) AE zu EB. Es verhält sich aber c zu dem Quadrat über ED, wie AB zu BE, weil also aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks ABD die Linie DE an die Grundlinie gezogen ist; so ist die Summe des Quadrats über AD und der Figur b gleich der Summe des Rechteks BAE und der Figur c; und, wenn man noch das gemeinschaftliche Quadrat über CD hinzu sezt; so ist die Summe des Quadrats über AD, der Figur b, und des Quadrats über CD gleich der Summe des Rechteks BAE, der Figur c, und des Quadrats über CD, d. i. nach dem vorhergehenden gleich der Summe der Rechte-

eke BAE, ECF und der Figur d, d. i. gleich dem gegebenen Raum.

Fig. 64. g.

3. Aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C seyen die Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe einer der Gattung nach gegebenen Figur über AD, einer der Gattung nach gegebenen Figur über BD und des Quadrats über CD gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Figur über AD heisse a, die Figur über BD, b. Es ist also (53. D.) das Verhältniß von a zu dem Quadrat über AD, und das Verhältniß von b zu dem Quadrat über BD gegeben. Es kann folglich nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie AB der Punkt E und die gerade Linie EF gefunden werden, so, daß sich BE zu EF verhält, wie a zu dem Quadrat über AD, und, AE zu EF, wie b zu dem Quadrat über BD. Es geschehe diß, und man ziehe ED; und die Figur c seye derjenige Raum, der sich zum Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, die Figur d derjenige Raum, der sich zum Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF, endlich seye die Figur e derjenige Raum, der sich zum Quadrat über ED verhält, wie AB zu EF. Es ist also nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b, gleich der Summe der Figuren c, d, e. Mithin ist die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, e und des Quadrats über CD. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt G so, daß sich CG zu GE verhalte wie (AB zu EF, d. i. wie) die Figur e zu dem Quadrat über ED, man ziehe GD; und es seye die Figur f derjenige Raum, der sich zum Quadrat

drat über GD verhält, wie CE zu EG. Mithin ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD, und der Figur e gleich der Summe des Rechteks ECG und der Figur f. Es ist aber bewiesen worden, daß die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich seye der Summe der Figuren c, d, e und des Quadrats über CD; mithin ist die Summe der Figuren a, b und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, des Rechteks ECG, und der Figur f. Nun ist, nach der Voraussezung jene erste Summe gleich einem gegebenen Raum, mithin auch die leztere. Und, weil die Figuren c, d, und das Rechtek ECG gegeben sind; so ist folglich die Figur f gegeben. Es hat aber f zu dem Quadrat über GD ein gegebenes Verhältniß, nemlich das Verhältniß von CE zu EG; mithin ist dieses Quadrat, also GD selbst der Grösse nach gegeben. Und, weil der Punkt G gegeben ist, so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Es seye H die Figur, welcher die über AD zu beschreibende Figur ähnlich seyn soll, und KL seye ihre mit AD ähnlich liegende Seite; M seye die Figur, welcher die über BD zu beschreibende Figur ähnlich werden soll, und NO seye ihre mit BD ähnlich liegende Seite. AB werde in dem Punkt E so getheilt, und die Linie EF so bestimmt, daß sich die Figur H zu dem Quadrat über KL verhalte, wie BE zu EF, und, daß sich die Figur M zu dem Quadrat über NO verhalte, wie AE zu EF. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt G so, daß sich CG zu GE verhalte, wie AB zu EF. P seye der gegebene Raum, dem die Summe der Figuren über AD, BD und des Quadrats über CD gleich seyn soll. c

 seye

seye eine Figur, die sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und d eine Figur, die sich zu dem Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF; so muß mithin der Raum P grösser seyn, als die Summe der Figuren c, d, und des Rechteks ECG; es seye also P gleich der Summe der Figuren c, d, des Rechteks ECG, und der Figur f; man nehme wie CE zu EG, so f zu dem Quadrat einer von G aus abgeschnittenen Linie GQ, und aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GQ beschreibe man einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht, so wird die Summe der über AD beschriebenen der Figur H ähnlichen Figur a, und der über BD beschriebenen, der Figur M ähnlichen Figur b, und des Quadrats über CD gleich seyn dem gegebenen Raum P. Denn man ziehe ED, GD, und es seye e eine Figur, die sich zu dem Quadrat über ED verhält, wie CG zu GE, d. i. wie AB zu EF. Und, weil aus dem Scheitelpunkt des Dreyeks CED die Linie DG an die Grundlinie gezogen ist, und f sich zu dem Quadrat über GQ oder GD verhält, wie CE zu EG; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehns. die Summe des Quadrats über CD und der Figur e gleich der Summe des Rechteks ECG und der Figur f. Und, weil aus dem Scheitelpunkt D des Dreyeks ABD die Linie DE an die Grundlinie gezogen ist, und a sich zum Quadrat über AD verhält, wie BE zu EF; b zum Quadrat über BD wie AE zu EF; c zum Quadrat über AE wie BE zu EF; d zum Quadrat über BE, wie AE zu EF; und e zum Quadrat über ED, wie AB zu EF; so ist nach dem 10ten Lehns. die Summe von a, b gleich der Summe von c, d, e. Mithin ist die Summe der Figuren a, b, und des Quadrats über CD gleich der Summe der Figuren c, d, e, und des Quadrats über CD, d. i. nach dem

vor-

vorhergehenden, gleich der Summe der Figuren c, d, des Rechteks ECG, und der Figur f; d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum P.

Fig. 64. h.

4. Es seyen aus den 3 gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, und es seye die Summe der über denselben beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seye a die über AD, b die über BD, und c die über CD beschriebene Figur, und, weil die Figuren a, b zu den Quadraten über AD, BD gegebene Verhältnisse haben; so kann man nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie AB einen Punkt E und eine gerade Linie EF so finden, daß sich BE zu EF wie a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF wie b zu dem Quadrat über BD verhalte. Es geschehe diß; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b gleich der Summe eines gegebenen Raums (er heisse T) und eines Raums, der sich zum Quadrat über DE verhält, wie AB zu EF. Dieser Raum seye die Figur d, so ist folglich die Summe der Figuren a, b, c gleich der Summe des Raums T, und der Figuren d, c. Es sind aber die Verhältnisse gegeben, welche die Figuren d, c zu den Quadraten über ED, CD haben; man finde also wieder nach dem 9ten Lehns. auf der geraden Linie CE den Punkt G, und die gerade Linie GH so, daß sich GE zu GH wie die Figur c zu dem Quadrat über CD, und CG zu GH wie die Figur d zu dem Quadrat über DE, d. i. wie AB zu EF verhalte; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren c, d gleich der Summe eines gegebenen Raums (er heisse V), und eines

 Raums,

Raums, der zu dem Quadrat über der ebenfalls noch gezogenen Linie GD das gegebene Verhältniß von CE zu GH hat. Dieser Raum seye die Figur e; so ist folglich die Summe der Figuren a, b, c (d. i. die Summe des Raums T und der Figuren c, d) gleich der Summe der Räume T, V, und der Figur e; mithin ist, weil jene erste Summe gegeben ist, auch die lezte gegeben. Und, weil die Räume T, V gegeben sind; so ist die Figur e gegeben, und weil diese zu dem Quadrat über GD ein gegebenes Verhältniß hat; so ist das Quadrat über GD, mithin GD selbst der Grösse nach gegeben. Da nun der Punkt G gegeben ist; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Es seyen K, N, Q diejenigen Figuren, welchen die über AD, BD, CD zu beschreibenden ähnlich seyn sollen, und LM, OP, RS seyen ihre mit AB, BD, CD ähnlich liegenden Seiten. Man ziehe die Linie AB, und finde den Punkt E, und die Linie EF so, daß sich BE zu EF wie K zu dem Quadrat über LM, und AE zu EF, wie N zu dem Quadrat über OP verhalte. Ferner ziehe man CE, und finde den Punkt G, und die Linie GH, so, daß sich EG zu GH wie Q zu dem Quadrat über RS, und CG zu GH wie AB zu EF verhalte. Die Summe desjenigen Raums, der sich zum Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und desjenigen, der sich zum Quadrat über EB verhält, wie AE zu EF, seye gleich dem Raum T. Und die Summe desjenigen Raums, der sich zum Quadrat über CG verhält, wie EG zu GH, und desjenigen, der sich zum Quadrat über GE verhält, wie CG zu GH seye gleich dem Raum V. Und X seye der gegebene Raum, welchem die Summe der über AD, BD, CD zu beschreibenden Figuren gleich seyn soll; so muß dieser

folg-

folglich grösser seyn, als die Summe der Räume T, V. Es seye also X gleich der Summe der Räume T, V, Y, und GZ seye eine gerade Linie, zu deren Quadrat sich der Raum Y verhält, wie CE zu GH; und man beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GZ einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt D desselben die geraden Linien AD, BD, CD zieht, und über diesen Linien den Figuren K, N, Q ähnliche Figuren a, b, c so beschreibt, daß ihre Seiten AD, BD, CD mit den Seiten LM, OP, RS ähnlich liegend sind; so wird die Summe der Figuren a, b, c gleich seyn dem gegebenen Raum X. Denn man ziehe ED, GD; weil nun die Figuren a, K ähnlich sind; so verhält sich a zu dem Quadrat über AD wie (K zu dem Quadrat über LM, d. i. nach der Verzeichnung, wie) BE zu EF, und aus ähnlichem Grunde verhält sich b zu dem Quadrat über BD, wie AE zu EF. Nun seye d derjenige Raum, der sich zum Quadrat über ED verhält, wie AB zu EF; so ist nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b gleich der Summe von T, d. Eben so hat, weil die Figuren c, Q ähnlich sind, c zu dem Quadrat über CD dasselbe Verhältniß, welches (Q zu dem Quadrat über RS, d. i.) EG zu GH hat; es verhält sich aber d zu dem Quadrat über ED wie (AB zu EF, d. i. wie) CG zu GH. Mithin ist nach dem 10ten Lehns. die Summe der Figuren c, d gleich der Summe des Raums V, und (eines Raums, der sich zu dem Quadrat über GD oder GZ verhält, wie CE zu GH, d. i.) des Raums Y, und beyderseits den Raum T hinzu gesezt ist die Summe von c, d, T gleich der Summe von T, V, Y. Es ist aber die Summe von a, b gleich der Summe von T, d; mithin ist die Summe von a, b, c gleich der Summe von T, V, Y, d. i. gleich dem gegebenen Raum X.

III. Fall. Wenn 4 Punkte gegeben sind.

Fig. 64. 1.

Aus den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D werden an einen Punkt E hin die geraden Linien AE, BE, CE, DE gezogen, und es seye die Summe der über allen beschriebenen Quadrate gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn man ziehe AB, und theile AB durch die Linie EF in F in zwey gleiche Theile; ferner ziehe man FC und theile FC durch die Linie EG in den Punkt G so, daß CG doppelt so groß seye als GF; so ist, wie bey dem Fall von 3 geraden Linien bewiesen worden, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, und des 3fach genommenen Quadrats über GE; folglich ist, wenn man noch die Linie GD zieht, und auf dieselbe das Perpendikel EH fällt, die Summe der Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, des Quadrats über DH, des 3fach genommenen Quadrats über GH, und des 4fach genommenen Quadrats über HE. Weil also das Verhältniß des 3fach genommenen Quadrats über GH zu dem Quadrat über GH gegeben ist; so ist, wenn man DG in dem Punkt K so theilt, daß DK 3mahl so groß ist, als GK, nach dem 7ten Lehns. die Summe des Quadrats über DH und des 3fach genommenen Quadrats über GH gleich der Summe des gegebenen Rechteks GDK und eines Raums, der sich zu dem Quadrat über KH verhält wie DG zu GK, d. i. gleich der Summe des Rechteks GDK und des 4fach genommenen Quadrats über KH. Folglich ist die Summe der 4 Quadrate über AE, BE, CE, DE gleich der Summe der gegebenen Rechteke BAF, FCG, GDK und

(der

(der 4fach genommenen Summe der Quadrate über KH, HE, d. i.) dem 4fach genommenen Quadrat über KE. Nach der Voraussezung aber ist die Summe jener vier Quadrate gegeben; also ist auch die Summe der 3 Rechteke und des 4fach genommenen Quadrats über KE gegeben. Es sind aber die 3 Rechteke gegeben, folglich ist auch das 4fach genommene Quadrat über KE, mithin das Quadrat über KE, also KE selbst der Grösse nach gegeben. Und, weil der Punkt K gegeben ist; so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Man verbinde zwey der gegebenen Punkte, welche man will, durch die gerade Linie AB, theile AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile, und ziehe an irgend einen der übrigen Punkte die gerade Linie FC, diese theile man in dem Punkt G so, daß CG doppelt so groß seye, als GF, nun ziehe man noch an den 4ten Punkt D die gerade Linie GD, und theile diese in dem Punkt K so, daß DK 3mahl so groß seye als KG. Nun muß, wie man aus der Analyse weiß, der gegebene Raum grösser seyn, als die Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK; es seye also dieser Raum gleich der Summe dieser 3 Rechteke und dem 4fach genommenen Quadrat über KL, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt K mit dem Halbmesser KL einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus den 4 Punten A, B, C, D an irgend einen Punkt E desselben die geraden Linien AE, BE, CE, DE zieht; so ist die Summe der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich dem gegebenen Raum, d. i. gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK und des 4fach genommenen Quadrats über KL. Denn man ziehe EF, EG, EK,

EK, und auf GD fälle man das Perpendikel EH; weil nun AB in F in zwey gleiche Theile getheilt ist, und CG doppelt so groß ist, als GF; so ist wie bey der Komposition für den Fall von 3 Punkten gezeigt worden, die Summe der 3 Quadrate CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, und des 3fach genommenen Quadrats über GE, d. i. gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG und der 3fach genommenen Summe der Quadrate über HG, HE. Man seze beyderseits das Quadrat über DE, oder die Summe der Quadrate über DH, HE hinzu; so ist die Summe der 4 Quadrate über DE, CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, des Quadrats über DH, des 3fach genommenen Quadrats über HG, und des 4fach genommenen Quadrats über HE; nun ist nach dem 7ten Lehns. (weil nemlich DK 3mahl so groß genommen worden, als KG) die Summe des Quadrats über DH und des 3fach genommenen Quadrats über HG gleich der Summe des Rechteks GDK und des 4fach genommenen Quadrats über HK. Folglich ist die Summe der 4 Quadrate über DE, CE, BE, AE gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK und (der 4fach genommenen Summe der Quadrate über HK, HE, d. i.) dem 4fach genommenen Quadrat über KE, oder KL, d. i. nach der Verzeichnung dem gegebenen Raum.

Und so werden nothwendig, wenn die Anzahl der Punkte zunimmt, Analyse und Komposition weitläuftiger, wenn man sie nemlich ohne Rüksicht auf die vorhergehenden einfacheren Fälle machen wollte. Es ist also, wie gegen das Ende des 29sten Sazes bemerkt worden, nüzlich, bey solchen Säzen, wo die Anzahl der gegebenen Dinge ohne Ende zunehmen kann, einen Weg zu zeigen, wie der für eine gewisse Anzahl gegebener Punkte verlangte Ort auf einen Ort zurük gebracht werden kann, bey dem die Anzahl der gegebenen Punkte

um

um Eins geringer ist, als jene erste Anzahl; und zwar diß bey der Analyse, damit dann die Komposition zu einer um Eins grössern Anzahl fortschreiten kann, wie beym folgenden Fall geschieht.

Fig. 64. k.

Es seyen aus den 4 gegebenen Punkten A, B, C, D an einen Punkt E hin die geraden Linien AE, BE, CE, DE gezogen, und die Summe der über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren seye gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Die Figur über AE heisse a, die über BE heisse b, die über CE c, die über DE d; so sind folglich die Verhältnisse dieser Figuren zu den Quadraten über den Linien gegeben, über welchen sie beschrieben sind (53. D.). Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehns. den Punkt F und die Linie FG so, daß sich BF zu FG wie a zu dem Quadrat über AE, und AF zu FG wie b zu dem Quadrat über BE verhalte; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b gleich der Summe eines gegebenen Raums, der H heisse, und einer Figur, die zu dem Quadrat über FE ein gegebenes Verhältniß nemlich das Verhältniß von AB zu FG hat. Diese Figur heisse e. Nun ist nach der Voraussezung die Summe der Figuren a, b, c, d gleich einem gegebenen Raum, mithin ist die Summe des Raums H und der Figuren e, c, d gleich eben diesem gegebenen Raum. Es ist aber der Raum H gegeben; also ist die Summe der Figuren e, c, d gegeben. Weil also aus 3 gegebenen Punkten F, C, D an einen Punkt E die geraden Linien FE, CE, DE gezogen sind, und die Summe der über diesen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gegeben ist; so berührt der

Punkt

Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem vorhergehenden II. Fall.

Komposition.

Es seye das Verhältniß der Figur a zu dem Quadrat über AE gleich dem Verhältniß der geraden Linie R zu T, und das Verhältniß der Figur b zu dem Quadrat über BE gleich dem Verhältniß von S zu T. Und nach dem 9ten Lehns. finde man auf der geraden Linie AB den Punkt F, und die Linie FG so, daß sich BF zu FG wie R zu T, und AF zu FG wie S zu T verhalte. Und es seye die Summe desjenigen Raums, welcher sich zu dem Quadrat über AF verhält, wie BF zu FG, und desjenigen Raums, welcher sich zum Quadrat über BF verhält, wie AF zu FG gleich dem Raum H; und K seye der gegebene Raum, dem die Summe der 4 über AE, BE, CE, DE zu beschreibenden Figuren a, b, c, d gleich seyn soll; so muß folglich K grösser seyn, als H.

Es seye also K gleich den beyden Räumen H und L, und man beschreibe nach dem vorhergehenden IIten Fall einen Kreis, so, daß, wenn man an irgend einen Punkt E desselben aus den gegebenen Punkten F, C, D die geraden Linien FE, CE, DE zieht, die Summe der Figuren e, c, d (von welchen die Figur e, welche über FE beschrieben werden soll, zu dem Quadrat über FE das gegebene Verhältniß von AB zu FG hat) gleich seye dem Raum L; so wird der Umfang dieses Kreises der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man noch die Linien AE, BE zieht, und über denselben Figuren a, b beschreibt, welche zu den Quadraten über AE, BE die gegebenen Verhältnisse von R zu T, und von S zu T haben; so wird die Summe der Figuren a, b, c, d gleich seyn dem gegebenen Raum K. Denn weil aus dem Scheitelpunkt E

des

des Dreyeks ABE die Linie EF an die Grundlinie gezogen ist, und sich a zu dem Quadrat über AE wie R zu T, d. i. wie BF zu FG; und b zu dem Quadrat über BE wie S zu T, d. i. wie AF zu FG verhält; und weil die Summe einer Figur, die sich zu dem Quadrat über AF verhält wie BF zu FG, und einer Figur, die sich zu dem Quadrat über BF verhält, wie AF zu FG gleich ist dem Raum H; endlich weil die über FE beschriebene Figur e sich zu dem Quadrat über FE verhält, wie AB zu FG; so ist nach dem 10ten Lehns. die Summe von a und b gleich der Summe von H und e, nach der Verzeichnung aber ist die Summe von e, d, c gleich dem Raum L. Mithin ist die Summe des Raums H und der Figuren e, c, d, d. i. die Summe der Figuren a, b, c, d gleich der Summe der Räume H und L, d. i. dem gegebenen Raum K.

Völlig auf ähnliche Art wird Analyse und Komposition, wenn 5 Punkte gegeben sind, auf die von 4 Punkten, und, wenn 6 Punkte gegeben sind, auf die von 5 Punkten, und so beständig, wie viel auch Punkte gegeben seyn mögen, auf Analyse und Komposition einer um Eins geringern Anzahl gegebener Punkte zurük gebracht.

Fermat sagt, Apollonius habe den Fall nicht bemerkt, wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind. Er wurde zu diesem Irrthum dadurch verleitet, weil er unter dem Wort *species* überall Quadrate verstund, da doch *species* oder τὸ εἶδος jede geradlinichte Figur bedeutet, wie z. B. im 31sten Saz des 6ten Buchs der Elem. Bey Pappus aber heißt in diesem und in dem folgenden Saz, wie auch in dem lezten Saz unsers Isten Buchs τὸ εἶδος eben das, was bey Euklid Saz 56. 57. 59. der Data τὸ εἶδος εἴδει δεδομένον, wofür Pappus nach seiner kurzen Art sich auszudrüken, nur schlechtweg τὸ εἶδος sezt.

Diesen

Diesen berühmten Ort zählt Fermat in einem Brief an Roberval S. 151 seiner Var. Op. Math. mit Recht unter die schönsten Säze der Geometrie. Da ich verschiedene Auflösungen desselben versuchte, kam ich auf den vorhergehenden 7ten Lehnsaz, und fand, daß sich dieser Ort leicht daraus werde herleiten lassen. Nachgehends fand ich denselben Lehnsaz bey Pappus, welches mich ungemein freute, weil ich jezt gewiß wußte, daß gerade die eigene Auflösung des Apollonius von diesem Ort vermittelst dieses Lehnsazes wieder hergestellt seye. Aus dieser Auflösung sieht man zugleich leicht, daß der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher der gesuchte Ort ist, immer, so viel auch Punkte gegeben seyn mögen, auch der Schwerpunkt aller dieser Punkte, d. i. gleicher an diesen Punkten aufgehängter Gewichte seye: eine Eigenschaft, welche Fermat nur in dem Fall, wenn 3 Punkte gegeben sind, bemerkt, und die er in dem angeführten Brief sehr bewundernswerth (satis miram) nennt. Zugleich ist in dieser Auflösung auch der Beweis des 12ten Sazes von Huygens Horologium Oscillatorium enthalten. Der Saz selbst ist nemlich dieser: „Wenn in einer Ebene eine beliebige „Anzahl Punkte gegeben ist, und aus ihrem Schwer„punkt ein Kreis beschrieben wird, und, wenn dann „an irgend einen Punkt auf dem Umfang dieses Kreises „aus allen gegebenen Punkten gerade Linien gezogen „werden; so ist die Summe der über allen diesen Linien „beschriebenen Quadrate immer dem nemlichen Flächen„raum gleich.“

Fig. 64. i.

Es seyen z. B. die 4 Punkte A, B, C, D gegeben, man ziehe AB, und theile sie in F in zwey gleiche Theile, ziehe FC und theile sie in dem Punkt G, so, daß

daß CG doppelt so groß ist, als GF, ziehe GD, und theile sie in dem Punkt K so, daß DK 3mahl so groß ist, als GK; so ist K der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D, wie aus der Erklärung des Schwerpunkts erhellet. Nun beschreibe man aus dem Punkt K mit einem beliebigen Halbmesser den Kreis LE, und ziehe an irgend einen Punkt E desselben die geraden Linien AE, BE, CE, DE; so ist, wie in der vorhergehenden Komposition gezeigt worden, die Summe der über allen diesen Linien beschriebenen Quadrate immer gleich der Summe der Rechteke BAF, FCG, GDK, und des über dem Halbmesser KE beschriebenen Quadrats so vielmahl genommen, als viel Punkte gegeben sind, d. i. also in diesem Fall des 4fachen Quadrats über KE. Huygens beweist diß durch eine ziemlich weitläuffige algebraische Rechnung in dem angeführten Ort. Es brauchen aber Fermat und Huygens bey ihren Auflösungen 2 gerade Linien, die einander unter rechten Winkeln schneiden, deren Lage nicht von den gegebenen Punkten abhängt, sondern die nach Belieben gezogen werden, und diß scheint die Ursache zu seyn, warum sie nicht auf die Auflösung des Apollonius verfielen. Am Ende dieses Sazes sezt Huygens hinzu: „Wenn man sezt, die gegebenen „Punkte haben verschiedene, aber unter einander kommen„surable Gewichte, wie wenn z. B. das Gewicht des „Punkts A 2, des Punkts B 3, des Punkts C 4, des „Punkts D 7 wäre, und wenn man wieder ihren gemein„schaftlichen Schwerpunkt findet, aus demselben einen „Kreis beschreibt, und an den Umfang dieses Kreises „aus den gegebenen Punkten gerade Linien zieht, und „auf jeder von diesen eben das vielfache ihres Quadrats „nimmt, welches das Gewicht ihres Punkts ausdrükt; „wenn man also in unserm Beyspiel das Quadrat von „AE 2mahl, das von BE 3mahl, das von CE 4mahl, „und das von DE 7mahl nimmt; so wird wieder die

„Summe aller dieser vielfachen gleich seyn einem gegebe-
„nen Raum, und zwar immer dem nemlichen, an was
„für einen Punkt des Umkreises man auch die geraden
„Linien zieht. Denn es erhellet diß aus dem vorherge-
„henden Beweis, wenn wir uns die Punkte selbst nach
„der Anzahl des jedem beygelegten Gewichts vervielfacht
„denken, nemlich, wie wenn in A zwey Punkte, in B 3,
„in C 4, in D 7, und zwar lauter gleich schwere Punkte
„vereinigt wären.“

Allein diese Bedingung, daß die Gewichte unter einander kommensurabel seyn sollen, ist nicht nöthig; denn wenn die Gewichte zu irgend einem Gewicht gegebene Verhältnisse haben, und man Räume nimmt, welche eben diese gegebenen Verhältnisse zu den Quadraten der Linien haben, die aus den gegebenen Punkten an irgend einen Punkt auf dem Umfang des beschriebenen Kreises gezogen werden; so ist die Summe aller dieser Räume gleich einem gegebenen Raum, wie aus dem folgenden 3ten Zusaz erhellen wird.

Fig. 64. I.

1. Zus. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten gegeben ist, und von diesen Punkten, und ihrem Schwerpunkt aus gerade Linien an irgend einen Punkt hin gezogen werden; so ist die Summe der über diesen Linien beschriebenen Quadrate gleich einem gegebenen Raum (nemlich der Summe der Quadrate über den geraden Linien, die aus den gegebenen Punkten an ihren Schwerpunkt gezogen werden) und noch dem Quadrat über der aus dem Schwerpunkt an den nemlichen Punkt gezogenen Linie so vielmahl genommen, als viel Punkte gegeben sind.

Denn es seyen z. B. 4 Punkte A, B, C, D gegeben, man ziehe AB und theile sie in E in zwey gleiche Theile;

Theile; so ist E der Schwerpunkt der Punkte A, B. Man ziehe EC, und theile sie in dem Punkt F so, daß CF doppelt so groß wird, als FE; so ist F der Schwerpunkt der 3 Punkte A, B, C. Eben so ziehe man FD und theile sie in dem Punkt G so, daß DG 3mahl so groß wird als GF; so ist G der Schwerpunkt der 4 Punkte A, B, C, D; und so weiter, wenn mehrere Punkte gegeben sind. Nun ziehe man AG, BG, CG, DG; so wird, wie in diesem 5ten Saz bewiesen werden, daß die Summe der Quadrate über AG, BG, CG gleich seye (dem 2fach genommenen Quadrat über AE, dem 2fach genommenen Quadrat über EF, dem Quadrat über CF, und dem 3fach genommenen Quadrat über FG, d. i.) der Summe der Rechteke BAE, ECF, und des 3fach genommenen Quadrats über FG. Also ist die Summe der Quadrate über AG, BG, CG, DG gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, und des 3fach genommenen Quadrats über FG und des Quadrats über DG; d. i. (weil das 3fach genommene Quadrat über FG gleich ist dem Rechtek FGD) die Summe jener 4 Quadrate ist gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, FDG. Nun ziehe man aus den gegebenen Punkten an irgend einen Punkt H die geraden Linien AH, BH, CH, DH und noch die gerade Linie GH; so ist nach diesem Saz die Summe der Quadrate über AH, BH, CH, DH gleich der Summe der Rechteke BAE, ECF, FDG, und des 4mahl genommenen Quadrats über GH, d. i. gleich der Summe der Quadrate über AG, BG, CG, DG und des 4mahl genommenen Quadrats über GH. Und eben so, wenn mehrere Punkte gegeben sind.

2. Zus. Wenn in einem Kreise irgend eine gleichseitige Figur beschrieben, und aus den Winkelpunkten der Figur, und dem Mittelpunkt des Kreises an irgend einen Punkt hin gerade Linien gezogen werden; so ist

 die

die Summe der Quadrate über den Linien, die aus den Mittelpunkten der Figur gezogen sind, gleich der so vielmahl genommenen Summe der beyden Quadrate, wovon das eine über der aus dem Mittelpunkt gezogenen Linie, das andere über dem Halbmesser des Kreises beschrieben ist, als viele Seiten die in den Kreis beschriebene Figur hat.

Fig. 64. m.

3. Zus. Wenn in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten gegeben ist, die verschiedene Gewichte haben; wenn aber ihre Gewichte zu irgend einem Gewicht gegebene Verhältnisse haben, und man von ihnen und ihrem Schwerpunkt aus gerade Linien an irgend einen Punkt hin zieht; so ist die Summe derjenigen Räume, welche zu den Quadraten über den Linien, die aus den gegebenen Punkten gezogen sind, nemlich je ein Raum zu einem Quadrat, diese gegebenen Verhältnisse haben, gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, welcher sich zu dem Quadrat über der aus dem Schwerpunkt gezogenen Linie verhält, wie die Summe aller Gewichte zu jenem einzigen Gewicht. Und der gegebene Raum ist gleich der Summe derjenigen Räume, welche zu den Quadraten über den Linien, die aus den gegebenen Punkten an den Schwerpunkt gezogen werden, immer je ein Raum zu einem Quadrat besagte gegebene Verhältnisse haben.

Es seyen die gegebenen Punkte A, B, C u. s. w. und ihre Gewichte heissen P, A; P, B; P, C; und P, Q seye dasjenige Gewicht, zu welchem sie gegebene Verhältnisse haben. Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehns. den Punkt E und die Linie EF so, daß sich BE zu EF verhalte, wie P, A zu P, Q; und EF zu AE wie P, Q zu P, B: so verhält sich gleichförmig BE zu AE wie P, A

zu

zu P, B. Also ist E der Schwerpunkt von P, A und P, B. Eben so ziehe man EC, und finde den Punkt G, und die gerade Linie GH so, daß sich das Gewicht in E, d. i. P, A + P, B zu dem Gewicht P, Q verhalte, wie CG zu GH; und daß P, Q sich zu P, C verhalte, wie GH zu GE: so verhält sich gleichförmig P, A + P, B zu P, C wie CG zu GE. Mithin ist G der Schwerpunkt von P, A; P, B; P, C; und eben so muß man dann weiter schliessen, wenn mehrere Punkte gegeben sind. Aus den gegebenen Punkten ziehe man an irgend einen beliebigen Punkt D die geraden Linien AD, BD, CD, und aus dem Schwerpunkt die gerade Linie GD; und es seyen a, b, c diejenigen Räume, die sich zu den Quadraten AD, BD, CD nemlich je ein Raum zu einem Quadrat verhalten, wie die Gewichte P, A; P, B; P, C zu dem Gewicht P, Q. Es muß also bewiesen werden, daß die Summe der Figuren a, b, c gleich seye der Summe eines gegebenen Raums, und desjenigen Raums, der sich zu dem Quadrat über GD verhält, wie die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q. Weil nun nach der Verzeichnung sich die Summe von P, A und P, B zu P, Q verhält, wie CG zu GH; und auch P, C sich zu P, Q verhält wie EG zu GH; so verhält sich (24, 5. E.) die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q wie CE zu GH. Es verhält sich aber a zu dem Quadrat über AD wie (P, A zu P, Q, d. i. wie) BE zu EF; und b verhält sich zu dem Quadrat über BD wie (P, B zu P, Q, d. i. wie) AE zu EF; und aus ähnlichem Grund verhält sich c zu dem Quadrat über CD wie EG zu GH. Und, nach der Verzeichnung verhält sich CG zu GH wie (die Summe von P, A und P, B zu P, Q, d. i. wie) AB zu EF. Also ist nach dem, was bey nr. 4. des IIten Falls unsers Sazes bewiesen worden, die Summe von a, b, c gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums e, der sich zu dem

Quadrat über GD verhält, wie CE zu GH, d. i. nach dem vorhergehenden, wie die Summe von P, A; P, B; P, C zu P, Q.

Es ist aber in der angeführten Stelle gezeigt worden, daß dieser gegebene Raum, (dem nemlich mit dem Raum e zusammen genommen die Summe von a, b, c gleich ist) gleich seye den beyden Räumen T, V, oder der Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF, und eines dritten, der sich zu dem Quadrat über CG verhält, wie EG zu GH, und eines vierten, der sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie CG zu GH. Man ziehe also die Linien AG, BG, CG; so muß bewiesen werden, daß die Summe dieser Räume gleich seye der Summe derjenigen Räume, die sich zu den Quadraten über AG, BG, CG verhalten, wie P, A; P, B; P, C zu P, Q. Es ist nach dem 10ten Lehns. die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AG verhält, wie (BE zu EF, d. i. wie) P, A zu P, Q und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BG verhält, wie (AE zu EF, d. i. wie) P, B zu P, Q gleich der Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über EB verhält, wie AE zu EF, und noch eines andern, der sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie (AB zu EF, d. i. wie) CG zu GH. Zu diesen gleichen Summen seze man noch beyderseits den Raum hinzu, der sich zu dem Quadrat über CG verhält, wie (EG zu GH, d. i. wie) P, C zu P, Q; so ist die Summe der Räume, welche sich zu den Quadraten über AG, BG, CG verhalten, wie P, A; P, B; P, C zu P, Q gleich der Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AE wie BE zu EF, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BE wie AE zu EF, und eines dritten,

dritten, der sich zu dem Quadrat über EG wie CG zu GH, und endlich eines vierten, der sich zu dem Quadrat über CG wie EG zu GH verhält; und diß sollte eben bewiesen werden.

Hieraus folgt ebenfalls ein neuer dem 2ten Zus. ähnlicher Zusaz.

Berechnung.

Fig. 64. a. b.

Ister Fall. 1) Es seye der gegebene Raum $= \mathfrak{R}$; $AB = a$; so ist $2DE^2 + 2AD^2 = \mathfrak{R}$, d. i. $DE^2 = \frac{\mathfrak{R}}{2} - AD^2$ $= \frac{2\mathfrak{R} - a^2}{4}$, mithin $DE = \frac{1}{2}\sqrt{2\mathfrak{R} - a^2}$, und AD $= DB = \frac{a}{2}$.

Fig. 64. c.

2) Das übrige bleibe, wie vorhin, und es seye das Verhältniß der Figur über BC zu dem Quadrat über $BC = \beta : 1$; so ist $AD : BD = \beta : 1$, mithin $AB : BD$ $= \beta + 1 : 1$, also $BD = \frac{a}{\beta+1}$, $AD = \frac{\beta a}{\beta+1}$, $BA \times AD$ $= \frac{\beta a^2}{\beta+1}$, folglich ist der Raum, der in der Komposition N heißt, $= \mathfrak{R} - \frac{\beta a^2}{\beta+1}$. Nun ist $N : DK^2$ $= \beta + 1 : 1$, folglich $DK^2 = \frac{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}{(\beta+1)^2}$, mithin $DK = \frac{\sqrt{(\beta+1)\mathfrak{R} - \beta a^2}}{\beta+1}$. Es erhellet hieraus

die auch von Simson bemerkte Identität dieses Falls mit dem Saz A.

Fig. 64. d.

2) Das übrige bleibe, wie bey nr. 2. und das Verhältniß der Figur über AC zu dem Quadrat über AC seye $= \alpha : 1$; so ist

$$\begin{aligned} BD : DE &= \alpha : 1 \\ DE : AD &= 1 : \beta \end{aligned}$$

mithin $BD : AD = \alpha : \beta$, und $AB : AD = \alpha + \beta : \beta$, und $AB : BD = \alpha + \beta : \alpha$, und $AB : DE = \alpha + \beta : 1$, mithin $AD = \frac{\beta a}{\alpha + \beta}$, $BD = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$, $DE = \frac{a}{\alpha + \beta}$, folglich die in der Komposition angenommene Figur d, welche sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie $\alpha : 1 = \frac{\alpha \beta^2 a^2}{(\alpha + \beta)^2}$, und eben so die in der Komposition angenommene Figur $e = \frac{\beta \alpha^2 a^2}{(\alpha + \beta)^2}$, also $d + e$ $= \frac{(\alpha + \beta) \alpha \beta a^2}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{\alpha \beta a^2}{\alpha + \beta}$, mithin der Raum N $= \mathfrak{R} - \frac{\alpha \beta a^2}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta) \mathfrak{R} - \alpha \beta a^2}{\alpha + \beta}$. Nun ist aber $N : DO^2 = \alpha + \beta : 1$, also

$$DO^2 = \frac{(\alpha + \beta) \mathfrak{R} - \alpha \beta a^2}{(\alpha + \beta)^2}, \text{ mithin}$$

$$DO = \frac{\sqrt{(\alpha + \beta) \mathfrak{R} - \alpha \beta a^2}}{\alpha + \beta}.$$

IIter Fall. Man könnte eben so, wie in der Komposition, und wie es bey dem vorigen Isten Fall geschehen ist, die einfacheren Fälle, wenn alle, oder doch einige

nige der der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind, zuerst betrachten, und alsdann zu den schwereren Fällen fortschreiten, in welchen keine oder doch nicht alle der der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind. Kürze halber werde ich aber gleich den allgemeinsten unter den besondern Fällen, welche zu dem IIten Hauptfall gehören, vornehmen, und aus der Rechnung für diesen alsdann die für die übrigen besondern Fälle herleiten. Es seye also

Fig. 64. h.

für den IIten Fall 4. der gegebene Raum $= \mathfrak{R}$, AB $= a$, BC $= b$, und der Winkel ABC $= B$; ferner das Verhältniß der Figur über AD zu dem Quadrat über AD $= \alpha : 1$; das Verhältniß der Figur über BD zu dem Quadrat über BD $= \beta : 1$; und endlich das Verhältniß der Figur über CD zu dem Quadrat über CD $= \gamma : 1$; so ist

$$BE : EF = \alpha : 1$$
$$EF : AE = 1 : \beta$$

mithin $BE : AE = \alpha : \beta$ und $AB : AE = \alpha + \beta : \beta$, folglich ist $AE = \frac{\beta AB}{\alpha + \beta} = \frac{\beta a}{\alpha + \beta}$, $BE = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$, und der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AE verhält, wie BE zu EF ist $= \frac{\alpha \beta^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$; eben so ist der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über BE verhält, wie AE zu EF, $= \frac{\beta \alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$, mithin ist der Raum T, welcher der Summe dieser beyden Räume gleich ist, $= \frac{\alpha \beta a^2}{\alpha + \beta}$. Ferner hat man in dem Dreyek BCE, in welchem die Seiten BC, BE nebst dem eingeschlossenen

Winkel bekannt sind: tang. BCE $= \frac{BE \sin. B}{BC - BE \operatorname{cosin}. B}$

$$= \frac{\alpha a \sin. B}{(\alpha+\beta)\, b - \alpha a \operatorname{cosin}. B}$$

und CE $= \sqrt{(BC^2 + BE^2 - 2\, BC.BE.\operatorname{cosin}. B)}$

$$= \sqrt{\left(b^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\alpha a b.\operatorname{cosin}. B}{\alpha+\beta}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a b \operatorname{cosin}. B}}{\alpha+\beta}$$

Ferner, weil EG : GH $= \gamma : 1$
und GH : CG $= 1 : \alpha+\beta$

so ist EG : CG $= \gamma : \alpha+\beta$
und CE : CG $= \alpha+\beta+\gamma : \alpha+\beta$

mithin CG $= \frac{(\alpha+\beta)\ CE}{\alpha+\beta+\gamma}$

$$= \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a b \operatorname{cosin}. B}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

oder CG$^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a b \operatorname{cosin}. B}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, der sich zu CG^2 verhält, wie EG zu GH oder wie $\gamma : 1$ ist

$$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a b \operatorname{cosin}. B]}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Eben so ist

EG$^2 = \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\, a b \operatorname{cosin}. B]}{(\alpha+\beta)^2 \times (\alpha+\beta+\gamma)^2}$

und der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über EG verhält, wie CG zu GH, d. h. wie $(\alpha+\beta) : 1$ ist

$= \gamma^2$

$$= \frac{\gamma^2[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cosin. B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\div\gamma)^2};$$

folglich ist die Summe der beyden erstgenannten Räume, oder der Raum V

$$= \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cosin. B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Weil nun $\mathfrak{R} = T + V + Y$, oder $Y = \mathfrak{R} - (T + V)$;

so ist $Y = \mathfrak{R} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cosin. B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= \mathfrak{R} - \frac{[\alpha\beta a^2(\alpha+\beta) + \gamma(\alpha\beta a^2 + \alpha^2 a^2)]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$- \frac{\gamma[(\alpha+\beta)^2 b^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cosin. B]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$= [(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma) a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \cosin. B] : (\alpha+\beta+\gamma)$$

Nun verhält sich das Quadrat von GZ zu Y, wie GH zu CE, d. h. wie $1 : (\alpha+\beta+\gamma)$, folglich ist

$$GZ = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma)a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2 + 2\alpha a b \cosin. B] : (\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Ist nun, wie bey dem IIten Fall 3 $\gamma = 1$; so bleibt der Werth von tang. BCE der vorhin gefundene, hingegen wird alsdann

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta) a b \cosin. B}}{\alpha+\beta+1}$$

und GZ, welche Linie bey dem IIten Fall 3 (Fig. 64. g.) GQ hieß, wird

$= \sqrt{}$

$$= \sqrt{[(\alpha+\beta+1)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+1)a^2 - (\alpha+\beta)b^2 + 2\alpha ab \text{ cosin. } B]} : (\alpha+\beta+1).$$

Ist, wie beym IIten Fall 2, $\beta = \gamma = 1$; so wird

$$\text{tang. } BCE = \frac{\alpha a \text{ sin. } B}{(\alpha+1)b - \alpha a \text{ cosin. } B},$$

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+1)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+1)ab \text{ cosin. } B}}{\alpha+2}$$

und GZ, welche Linie für diesen Fall (Fig. 64. f.) FO hieß, wird

$$= \frac{\sqrt{[(\alpha+2)\mathfrak{R} - 2\alpha a^2 - (\alpha+1)b^2 + 2\alpha ab \text{ cosin. } B]}}{\alpha+2}$$

Ist endlich, wie beym IIten Fall 1, $\alpha = \beta = \gamma = 1$; so wird

$$\text{tang. } BCE = \frac{a \text{ sin. } B}{2b - a \text{ cosin. } B},$$

$$CG = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2 - 4ab \text{ cosin. } B}}{3},$$ und GZ, welche Linie aber für diesen Fall (Fig. 64. e.) GH hieß, ist

$$= \frac{\sqrt{(3\mathfrak{R} - 2a^2 - 2b^2 + 2ab \text{ cosin. } B)}}{3}.$$

Eben so kann man nun bey fortgesezter Rechnung, wie viel auch Punkte gegeben seyn mögen, durch ähnliche Formeln den Halbmesser des zu beschreibenden Kreises, und die Lage seines Mittelpunkts bestimmen. Fährt man noch etwas weiter zu rechnen fort, so erhält man bald ein allgemeines Gesez, unter welchem alle hierzu nothwendige Formeln stehen. Sind nemlich aus einer beliebigen Anzahl Punkte A, B, C, D, E, F u. s. w. an einen Punkt Z hin gerade Linien AZ, BZ, CZ, DZ, EZ, FZ u. s. w. gezogen, und sind die über ihnen beschrie-

schriebene der Gattung nach gegebene Figuren von der Beschaffenheit, daß die

Figur über AZ zu dem Quadrat über AZ wie $\alpha : 1$
— — BZ — — — — BZ — $\beta : 1$
— — CZ — — — — CZ — $\gamma : 1$
— — DZ — — — — DZ — $\delta : 1$
— — EZ — — — — EZ — $\varepsilon : 1$

u. s. w. sich verhält, und heißt der gegebene Raum, welchem die Summe dieser Figuren gleich ist, = $\Re$, und die Linien AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, EF = e u. s. w. und die Winkel ABC = B, BCD = C, CDE = D, DEF = E u. s. w. und denken wir uns den Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises in einem Punkt G; so kommt alles darauf an, allgemein theils die Grösse des Halbmessers GZ, theils die Lage des Mittelpunkts G, folglich zu dieser lezten Absicht, wenn 2 Punkte gegeben sind, die Linie BG; wenn 3 Punkte gegeben sind, die Linie CG; wenn 4 gegeben sind, die Linie DG; wenn 5 gegeben sind, die Linie EG u. s. w. und zugleich, wenn 3 Punkte gegeben sind, den Winkel BCG, wenn 4 Punkte gegeben sind, den Winkel CDG; wenn 5 Punkte gegeben sind, den Winkel DEG; wenn 6 Punkte gegeben sind, den Winkel EFG u. s. w. zu bestimmen. Nimmt man nun die Rechnung wirklich vor; so erhält man zur Bestimmung dieses Winkels, wenn 3 Punkte gegeben sind, wie wir gesehen haben:

$$\text{tang. BCG} = \frac{\alpha a \sin. B}{(\alpha + \beta) b - \alpha a \operatorname{cosin.} B}.$$

Eben so, wenn 4 Punkte gegeben sind,

$$\text{tang. CDG} = \frac{(\alpha+\beta) b \sin. C - \alpha a \sin. (B+C)}{(\alpha+\beta+\gamma) c - (\alpha+\beta) b \operatorname{cosin.} C + \alpha a \operatorname{cosin.} (B+C)}$$

Eben so, wenn 5 Punkte gegeben sind,

tang.

$$\text{tang. DEG} = [(\alpha+\beta+\gamma)c\,\text{sin. D} - (\alpha+\beta)b\,\text{sin. (C+D)} + \alpha a\,\text{sin. (B+C+D)}] : [(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vartheta - (\alpha+\beta+\gamma)c\,\text{cosin. D} + (\alpha+\beta)b\,\text{cosin.(C+D)} - \alpha a\,\text{cosin. (B+C+D)}]$$

Eben so, wenn 6 Punkte gegeben sind; so ist

$$\text{tang. EFG} = [(\alpha+\beta+\gamma+\delta)b\,\text{sin.E} - (\alpha+\beta+\gamma)c\,\text{sin.(D+E)} + (\alpha+\beta)b\,\text{sin. (C+D+E)} - \alpha a\,\text{sin. (B+C+D+E)}] : [(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)e - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)b\,\text{cosin. E} + (\alpha+\beta+\gamma)c\,\text{cosin.(D+E)} - (\alpha+\beta)b\,\text{cosin.(C+D+E)} + \alpha a\,\text{cosin. (B+C+D+E)}].$$

Das Gesez, wodurch die Tangente bestimmt wird, fällt sogleich in die Augen, nur muß es noch allgemein erwiesen werden. Ehe wir aber sehen, wie diß geschehen kann, wollen wir nur erst die übrigen nothwendigen Formeln zusammen stellen. So hatten wir, wenn 2 Punkte gegeben sind, gefunden, daß BG (was oben beym Isten Fall 3. BD hieß) seye $= \frac{\alpha a}{\alpha+\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 a^2}}{\alpha+\beta}$.

Eben so hatten wir, wenn 3 Punkte gegeben sind,

$$CG = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\,ab\,\text{cosin. B}}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Eben so findet man, wenn 4 Punkte gegeben sind,

$$DG = \sqrt{}[(\alpha+\beta+\gamma)^2 c^2 + (\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2(\alpha+\beta)\alpha ab\,\text{cosinB} - 2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)bc\,\text{cosin.C} + 2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha ac\,\text{cosin. (B+C}] : (\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Eben so, wenn 5 Punkte gegeben sind,

$$EG = \sqrt{}[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 d^2 + (\alpha+\beta+\gamma)^2 c^2 + (\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2$$
$$- 2(\alpha+\beta)\alpha a b \cos in. B - 2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta) b c \cos in. C$$
$$- 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma) c d \cos in. D$$
$$+ 2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha a c \cos in. (B+C)$$
$$+ 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta) b d \cos in. (C+D)$$
$$- 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\alpha a d \cos in. (B+C+D)]$$
$$: (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

wo sich ebenfalls das Gesez leicht übersehen läßt, besonders, wenn man den Zähler in Classen eintheilt, und zu der 1sten Classe alle diejenigen Glieder rechnet, welche keinen cosinus enthalten; zu der 2ten alle diejenigen, welche den cosinus eines der gegebenen Winkel; zu der 3ten alle diejenigen, welche den cosinus von der Summe von 2 der gegebenen Winkel enthalten u. s. w. wobey bemerkt werden kann, daß jede Classe in allen ihren Gliedern einerley Zeichen behält, die Classen selbst aber mit den Zeichen + und — abwechseln, wie auch daß die lezte Klasse immer 1 Glied, die vorlezte 2, und so immer die vorhergehende ein Glied weiter hat, als die nachfolgende; die erste Classe hat, wenn e Punkte gegeben sind, immer e — 1 Glieder, folglich sind auch immer e — 1 Classen vorhanden, und die Anzahl aller Glieder ist $= \frac{e(e-1)}{2}$.

Zur Bestimmung des Halbmessers GZ endlich fanden wir, wenn 2 Punkte gegeben sind, (in welchem Fall oben der Halbmesser DO hieß):

$$GZ = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta)\mathfrak{R} - \alpha\beta a^2}}{\alpha+\beta}.$$

Eben so, wenn 3 Punkte gegeben sind,

$$GZ = \sqrt{}[(\alpha+\beta+\gamma)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma)a^2 - (\alpha+\beta)\gamma b^2$$
$$+ 2\alpha a b \cos in. B] : (\alpha+\beta+\gamma).$$

Eben

Eben so findet man nun, wenn 4 Punkte gegeben sind,

$$GZ = \sqrt{}[(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma+\delta)a^2$$
$$- (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)b^2 - (\alpha+\beta+\gamma)\delta c^2$$
$$+ 2\alpha(\gamma+\delta)ab\cos. B + 2(\alpha+\beta)\delta bc\cos. C$$
$$- 2\alpha\delta ac\cos.(B+C)] : (\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Eben so, wenn 5 Punkte gegeben sind,

$$GZ = \sqrt{}[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\mathfrak{R} - \alpha(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)a^2$$
$$-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\varepsilon)b^2 - (\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)c^2$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\varepsilon\mathfrak{d}^2$$
$$+ 2\alpha(\gamma+\delta+\varepsilon)ab\cos. B + 2(\alpha+\beta)(\delta+\varepsilon)bc\cos. C$$
$$+ 2(\alpha+\beta+\gamma)\varepsilon c\mathfrak{d}\cos. D$$
$$-2\alpha(\delta+\varepsilon)ac\cos.(B+C) - 2(\alpha+\beta)\varepsilon b\mathfrak{d}\cos.(C+D)$$
$$+ 2\alpha\varepsilon a\mathfrak{d}\cos.(B+C+D)] : (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon).$$

Man sieht, daß von den Zeichen der Classen die oben gemachte Anmerkung gleichfalls gilt. Auch die Anzahl der Classen und der Glieder ist blos darum immer um 1 grösser, als nach der vorhergehenden Bestimmung, weil hier immer das 1ste Glied, das ein Produkt ist des gegebenen Raums durch die Summe so vieler Werthe α, β, γ, u. s. w. als Punkte gegeben sind, hinzu kommt, und auch eine eigene Classe ausmacht. Hienach hat man also, wenn e Punkte gegeben sind, immer auch e Classen, in der 1sten 1 Glied, in der 2ten e — 1 Glieder, in der 3ten e — 2 Glieder u. s. w. endlich in der lezten wieder 1 Glied, zusammen also $\frac{e(e-1)}{2} + 1$ Glieder.

Daß nun die Geseze, welchen diese Formeln folgen, allgemein wahr seyen, wird erwiesen seyn, wenn gezeigt werden kann, daraus daß sie für e gegebene

Punkte

Punkte gelten, folge zugleich, daß sie auch für $e+1$ gegebene Punkte gelten. Um nun den Anfang mit der lezten Formel zu machen, welche den Halbmesser des zu beschreibenden Kreises ausdrükt; so wollen wir erweisen, daß, wenn bey e Punkten das beobachtete Gesez (das wohl nicht nöthig seyn wird, hier erst seinen einzelnen Theilen nach wörtlich auszudruken, da es in der Formel selbst schon deutlich genug liegt, und auch durch das folgende erläutert werden wird) Statt finde, d. h. wenn bey e gegebenen Punkten

$$
\begin{aligned}
GZ = \surd [& (\alpha+\beta+\gamma \ldots +\varrho)\,\mathfrak{R} \\
& -\alpha(\beta+\gamma+\delta \ldots +\varrho)a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta \ldots +\varrho)b^2 \\
& -(\alpha+\beta+\gamma)(\delta \ldots +\varrho)c^2 \ldots\ldots -(\alpha+\beta \ldots +\pi)\varrho p^2 \\
& +2\alpha(\gamma+\delta \ldots +\varrho)ab\,\mathrm{cosin}B + 2(\alpha+\beta)(\delta+\varepsilon \ldots +\varrho)bc\,\mathrm{cosin.}C \\
& +2(\alpha+\beta+\gamma)(\varepsilon \ldots +\varrho)cd\,\mathrm{cosin.}D \ldots\ldots \\
& +2(\alpha+\beta+\gamma \ldots +o)\varrho\, o\, p\,\mathrm{cosin.}P \\
& -2\alpha(\delta+\varepsilon \ldots +\varrho)\,a\,c\,\mathrm{cosin.}(B+C) \\
& \qquad -2(\alpha+\beta)(\varepsilon \ldots +\varrho)\,b\,d\,\mathrm{cosin.}(C+D) \\
& -2(\alpha+\beta+\gamma)(\zeta \ldots +\varrho)ce\,\mathrm{cosin.}(D+E) \ldots\ldots \\
& -2(\alpha+\beta \ldots +\nu)\varrho\, n\, p\,\mathrm{cosin.}(O+P) \\
& +2\alpha(\varepsilon+\zeta \ldots +\varrho)ad\,\mathrm{cosin.}(B+C+D) \\
& +2(\alpha+\beta)(\zeta \ldots +\varrho)be\,\mathrm{cosin.}(C+D+E) \\
& \ldots\ldots +2(\alpha+\beta \ldots +\mu)\varrho\, m\, p\,\mathrm{cosin.}(N+O+P) \\
& - \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \\
& \pm 2\alpha(\pi+\varrho)\,a\,o\,\mathrm{cosin.}(B+C \ldots +O) \\
& \pm 2(\alpha+\beta)\varrho\, b\, p\,\mathrm{cosin.}(C+D \ldots +P) \\
& \mp 2\alpha\varrho\, a\, p\,\mathrm{cosin.}(B+C \ldots +P)] \\
& :(\alpha+\beta+\gamma \ldots +\varrho)
\end{aligned}
$$

daß alsdann bey $e+1$ Punkten das nemliche Gesez Statt finden werde. Dieser Beweis kann vermittelst der nemlichen Betrachtungen geführt werden, die Simson

 braucht,

braucht, um die für eine gewisse Anzahl Punkte gebrauchte Analyse und Komposition auf eine um Eins grössere Anzahl von Punkten anwenden zu können, oder, was eben darauf hinaus kommt, um diese leztere Anzahl von Punkten auf eine um Eins geringere Anzahl zurük zu bringen. Es seye nemlich Fig. 64. k eine beliebige Anzahl Punkte A, B, C u. s. w. gegeben, und von ihnen an einen andern E hin gerade Linien gezogen, und die Summe der über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren a, b, c u. s. w. seye gleich einem gegebenen Raum = $\mathfrak{R}$, und man theile die Linie AB in dem Punkt F so, und finde FG so, daß

$BF : FG = a : AE^2 = \alpha : 1$

$FG : AF = BE^2 : b = 1 : \beta$; so ist folglich

$BF : AF = \alpha : \beta$, und $AB : AF = \alpha + \beta : \beta$

folglich, wenn $AB = a$ gesezt wird, $AF = \frac{\beta a}{\alpha + \beta}$; $BF = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$ und $AB : FG = \alpha + \beta : 1$. Nun zeigt Simson, daß, wenn man die Linie FE zieht, $a + b$ gleich seye einem gegebenen Raum H, und einer über FE beschriebenen Figur e, die sich zu dem Quadrat über FE verhalte, wie AB : FG, d. h. wie $\alpha + \beta : 1$. Dieser gegebene Raum H ist nemlich nach dem Zus. des 10ten Lehns. = den Rechteken $HD \times DA + LD \times DB$ der dortigen Figur. Es ist aber dort $HD : DA = FC \times CA : CA^2 = \alpha : 1$. Nun ist, was dort DA hieß, hier AF oder $\frac{\beta a}{\alpha + \beta}$, folglich das dortige $HD = \frac{\alpha \beta a}{\alpha + \beta}$, und das dortige Rechtek HDA hier $= \frac{\alpha \beta^2 a^2}{(\alpha + \beta)^2}$. Eben so ist im Zus. des 10ten

Lehns.

Lehns. LD : DB $= \beta : 1$, aber das dortige DB hier $= BF = \frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$, also das dortige LD $= \frac{\beta\alpha a}{\alpha+\beta}$, und das dortige Rechtek LDB $= \frac{\beta\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2}$; folglich der Raum H $= \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$, mithin $a+b = \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}+e$. Da nun $a+b+c+$ u. s. w. $=\mathfrak{R}$; so ist $e+c$ . . . u. s. w. $= \mathfrak{R} - \frac{\alpha\beta a^2}{\alpha+\beta}$, und es ist die Anzahl der beschriebenen Figuren dadurch um Eins geringer gemacht, weil jezt statt $a+b$ nur die Figur e vorkommt.

Will man nun so eine Anzahl gegebener Punkte auf eine um Eins geringere Anzahl reduciren; so muß man mithin jezt den Punkt F statt des vorhin vorkommenden Punkts A; die Figur über FE statt der über AE; folglich das Verhältniß $\alpha+\beta : 1$ statt des Verhältnisses $\alpha : 1$ sezen; und eben so die Linie FC statt AB; CD statt BC u. s. w. substituiren; endlich noch eben so den Winkel FCD statt des Winkels B u. s. w. Man muß also vor allen Dingen wissen, was der Werth der Linie FC, des Winkels FCD u. s. w. ist.

Hiessen nun vorhin die Linien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ u. s. w. der Winkel $ABC = B$, $BCD = C$ u. s. w.; so ist jezt in dem Dreyek FBC die Seite $FB = \frac{\alpha a}{\alpha+\beta}$, die Seite $BC = b$, und der Winkel B bekannt, und man findet

$$FC = \sqrt{}\left(b^2 + \frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\alpha ab}{\alpha+\beta}\,\text{cosin. } B\right)$$

$$= \frac{\sqrt{}[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)ab\,\text{cosin. } B)}{\alpha+\beta}$$

Diesen Werth muß man also immer statt dessen, was vorher a war, substituiren, wenn man die Formeln, die für eine um Eins geringere Anzahl von Punkten galten, auf eine um Eins grössere Anzahl anwenden will.

Ferner hat man

$$\sin.\ BCF = \frac{BF.\ \sin.\ B}{\sqrt{(BF^2 + BC^2 - 2\,BF.\ BC\ \cos.\ B)}}$$

$$= \frac{\alpha\ a\ \sin.\ B.}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\ a\ b\ \cos.\ B]}}$$

und $\cos.\ BCF = \frac{BC - BF.\ \cos.\ B}{\sqrt{(BF^2 + BC^2 - 2BF.BC.\cos.B)}}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\ b - \alpha\ a\ \cos.\ B}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\ a\ b \cos.B]}},$$

folglich ist $\sin.\ FCD = \sin.\ (C - BCF)$

$\sin.\ C.\ \cos.\ BCF - \cos.\ C.\ \sin.\ BCF$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\ b\ \sin.\ C - \alpha\ a\ \sin.\ (B+C)}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\,\alpha(\alpha+\beta)\ a\ b\ \cos.\ B]}}.$$

Dieser Ausdruk muß also statt dessen, was vorher sin. B war, substituirt werden. Eben so ist $\cos.\ FCD = \cos.\ C.\ \cos.\ BCF + \sin.\ C.\ \sin.\ BCF$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\ b\ \cos.\ C - \alpha\ a\ \cos.\ (B+C)}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\ a\ b\ \cos.\ B]}},$$

und dieser Ausdruk muß statt cosin. B substituirt werden.

Kommt nun noch in einer Formel vor sin. (B+X), wo X die Summe von einer beliebigen Anzahl von Winkeln C+D+E+F u. s. w. bedeuten kann; so ist $\sin.\ (B+X) = \sin.\ B.\ \cos.\ X + \cos.\ B\ \sin.\ X$. Sezt man nun statt X jezt X′, wo X′ die Summe der Winkel

kel D + E + F + G, u. s. w. bedeutet, und eben so statt sin. B, cosin. B die eben gefundenen Werthe; so muß statt sin. (B+X) gesezt werden

$$[(\alpha+\beta) b (\sin. C \cosin. X' + \cosin. C. \sin. X')$$
$$- \alpha a (\sin. (B+C) \cosin. X' + \cosin. (B+C) \sin. X')]$$
$$: \sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha (\alpha+\beta) a b \cosin. B]}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta) b \sin. (C+X') - \alpha a \sin. (B+C+X')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha (\alpha+\beta) a b \cosin. B]}}.$$

Eben so, wenn cosin. (B+X) vorkommt; so ist

$\cosin. (B+X) = \cosin. B. \cosin X - \sin. B. \sin. X$, mithin statt B und X ihren neuen Werth substituirt; so muß statt cosin. (B + X) gesezt werden

$$[(\alpha+\beta) b (\cosin. C. \cosin. X' - \sin. C. \sin. X')$$
$$- \alpha a (\cosin. (B+C). \cosin. X' - \sin. (B+C) \sin. X')]$$
$$: \sqrt{[(\alpha+\beta)^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha (\alpha+\beta) a b \cosin. B]}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta) b \cosin. (C+X') - \alpha a \cosin. (B+C+X')}{\sqrt{[(\alpha+\beta)^2 a^2 + \alpha^2 a^2 - 2\alpha (\alpha+\beta) a b \cosin. B)}}$$

Endlich muß statt	C	D	E	u. s. w.	$\Re$
gesezt werden	D	E	F	u. s. w.	$\Re - \frac{\alpha \beta a^2}{\alpha+\beta}$

ferner statt	α	β	γ	u. s. w.	b	c	d	u. s. w.
wird substituirt	$\alpha+\beta$	γ	δ	u. s. w.	c	d	e	u. s. w.

Nimmt man nun die angezeigten Substitutionen in der obigen Formel von GZ für e gegebene Punkte vor; so erhält man für e + 1 = f Punkte folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
GZ = [& (\alpha+\beta+\gamma \ldots +\sigma)\mathfrak{R} \\
& -\alpha(\beta+\gamma+\delta \ldots +\sigma)a^2 - (\alpha+\beta)(\gamma+\delta \ldots +\sigma)b^2 \\
& -(\alpha+\beta+\gamma)(\delta \ldots +\sigma)c^2 \ldots\ldots - (\alpha+\beta \ldots +\varrho)\sigma r^2 \\
& +2\alpha(\gamma+\delta \ldots +\sigma)ab\,\text{cosin.}B + 2(\alpha+\beta)(\delta \ldots +\sigma)bc\,\text{cosin.}C \\
& \ldots\ldots + 2(\alpha+\beta \ldots +\pi)\sigma pr\,\text{cosin.}\,R \\
& -2\alpha(\delta+\varepsilon \ldots +\sigma)ac\,\text{cosin.}\,(B+C) \\
& -2(\alpha+\beta)(\varepsilon \ldots +\sigma)bd\,\text{cosin.}\,(C+D) \\
& \ldots\ldots - 2(\alpha+\beta \ldots +o)\sigma or\,\text{cosin.}\,(P+R) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \\
& \mp 2\alpha(\varrho+\sigma)ap\,\text{cosin.}\,(B+C+D \ldots +P) \\
& \mp 2(\alpha+\beta)\sigma br\,\text{cosin.}\,(C+D \ldots\ldots +R) \\
& \pm 2\alpha\sigma ar\,\text{cosin.}\,(B+C \ldots +R)] \\
& :(\alpha+\beta+\gamma \ldots\ldots +\sigma)
\end{aligned}
$$

Da nun diese Formel ganz das angegebene Gesez befolgt; so ist das Gesez, wenn es von e Punkten wahr ist, auch von e+1 gegebenen Punkten wahr. Nun gilt es aber, wie wir gesehen haben, von 2 Punkten, folglich auch von 3, folglich auch von 4, ... folglich von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte.

Völlig eben so wird die Allgemeinheit der Geseze für die übrigen Formeln vermittelst eben dieser Substitutionen erwiesen.

6. Saz.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten zwey gerade Linien an einen Punkt hin gezogen werden, und aus diesem Punkt eine gerade Linie mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und diese auf einer andern der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük abschneidet, dessen anderer Endpunkt gegeben ist; und wenn die Summe von Figuren, die der Gattung nach gege-

gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen geraden Linien beschrieben sind, gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie und zwischen dem abgeschnittenen Stük enthalten ist: so berührt der Durchschnitts-Punkt jener zwey aus den gegebenen Punkten gezogenen Linien einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie, auf welcher das Stük abgeschnitten wird, durch den Punkt geht, welcher die gerade Linie zwischen den beyden gegebenen Punkten in zwey gleiche Theile theilt, und die der Gattung nach gegebenen Figuren Quadrate sind.

Fig. 65. a.

Aus den gegebenen Punkten A, B seyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, es schneide CD auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die durch die Mitte von AB geht, das Stük DE ab, dessen anderer Endpunkt E gegeben ist, und die Summe der Quadrate über AC, BC seye gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie, und zwischen dem Stük DE enthalten ist: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es begegne DE der Linie AB in dem Punkt F, oder, wenn DE durch die Punkte A, B selbst geht; so seye AB in dem Punkt F in zwey gleiche Theile getheilt, man ziehe FC, und es seye das doppelte von FG oder Fg gleich der gegebenen geraden Linie; so ist folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, CB (6ter Lehns.), d. i. nach der Voraussezung gleich dem doppelten Rechtek GF×DE.

GF×DE. Es seye aber das Rechtek GF×EH gleich dem Quadrat über der gegebenen Linie AF; so wird, weil GF gegeben ist, auch EH gegeben seyn, man schneide diese Linie EH auf der Linie ED, aus E gegen D hin ab; weil nun der Punkt E gegeben ist, so ist auch der Punkt H gegeben. Und da die Summe der Quadrate über AF, FC gleich ist dem Rechtek GF×DE, und das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek GF×EH; so ist der Rest nemlich das Quadrat über FC gleich dem übrig bleibenden Rechtek GF×HD. Folglich, weil aus einem gegebenen Punkt F eine gerade Linie FC, und aus dem Endpunkt C dieser Linie eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist, und weil diese Linie CD auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, die durch den Punkt F geht, ein Stük DH, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist, abschneidet, so, daß das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie FG, und zwischen dem Stük DH enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten oder 2ten Fall des 3ten Sazes unsers IIten Buchs.

Es liege aber der Punkt E auf eben der Seite des Punkts F, auf welcher A liegt, (denn läge er auf der entgegen gesezten Seite, so würde die Komposition völlig auf die nemliche Art gemacht werden). Weil nun das Rechtek GF×ED grösser ist, als das Rechtek GF×EH; so fällt der Punkt H zwischen E und D, d. i. der Punkt D liegt auf der nach H hin verlängerten Seite EH.

Fig. 65. b.

Wenn nun 1) der Punkt H auf den Punkt F fällt, d. i. wenn das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek GFE,

GFE, und man den Punkt H auf der Seite von E nimmt, auf welcher der Punkt F liegt; so geschieht die Komposition nach dem 1sten Fall des angeführten 3ten Sazes, weil nemlich das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek GFD.

Fig. 65. c.

2) Wenn das Rechtek GF×EH, d. i. das Quadrat über AF kleiner ist, als das Rechtek GFE, und man EH gegen F hin trägt; so fällt der Punkt D auf eben diese Seite, d. i. entweder zwischen F und H, oder auf die nach B hin verlängerte Linie FH, denn ED ist immer grösser als EH. Mithin geschieht die Komposition nach dem ersten Theil der Komposition für den 2ten Fall des 3ten Sazes.

Fig. 65. d.

3) Wenn man in einem von diesen beyden Fällen, in welchen nemlich das Quadrat über AF entweder gleich oder kleiner ist als das Rechtek GFE, die Linie Eh auf derjenigen Seite des Punkts E nimmt, auf welcher der Punkt F nicht liegt, d. i. wenn der Punkt d auf dieser Seite liegen soll, so wird, weil das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek GF×dh, die Komposition nach dem zweyten Theil der Komposition für den 2ten Fall des 3ten Sazes gemacht. Weil aber in diesem Fall nach der Bestimmung für den angeführten Theil des 2ten Falls des 3ten Sazes erfodert wird, daß das Rechtek gFh kleiner seye als das Quadrat über Fk dem Halbmesser eines Kreises, dessen über Fg beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt gleich dem gegebenen cdF; so muß folglich die Summe der Rechteke gF×Eh, und gFE, d. i. die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks gFE kleiner seyn als das Quadrat über Fk.

Fig. 65. c.

4) Wenn aber das Rechtek GF×EH, d. i. das Quadrat über AF grösser ist, als das Rechtek GFE, und man EH gegen F hin trägt; so fällt der Punkt D auf eben die Seite, d. i. auf die nach H hin verlängerte Linie FH, folglich wird die Komposition nach dem 2ten Theil der Komposition für den 2ten Fall des 3ten Sazes gemacht. Weil aber für diesen Fall erfodert wird, daß das Rechtek GFH kleiner seye als das Quadrat über FK dem Halbmesser eines Kreises, dessen über FG beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt, gleich dem gegebenen Winkel CDF; so muß, das gemeinschaftliche Rechtek GFE hinzu gesezt, das Rechtek GF×EH, d. i. das Quadrat über AF kleiner seyn, als die Summe des Quadrats über KF und des Rechteks GFE.

5) Endlich, wenn in diesem lezten Fall, wo nemlich das Rechtek GF×EH oder das Quadrat über AF grösser ist, als das Rechtek GFE, Eh auf derjenigen Seite von E genommen wird, auf welcher F nicht ist, so wird Komposition und Bestimmung dieselbe, wie im vorhergehenden bey nro. 3.

Diß also voraus geschikt, welches zur Unterscheidung der Fälle und der Bestimmungen des Orts nothwendig war, ist folgendes die

Komposition.

Fig. 65.

Es seyen A, B die gegebenen Punkte, aus welchen die geraden Linien an einen Punkt hin gezogen werden sollen, E seye der andere auf AB gegebene Punkt; und die der Grösse nach gegebene gerade Linie seye doppelt so groß als die gerade Linie M. Man theile AB in dem Punkt

Punkt F in zwey gleiche Theile, finde zu M und AF die dritte Proportionallinie N, und, wenn (Figg. 65. b. c.) das Quadrat über AF gleich ist dem Rechtek M×FE, oder kleiner ist, als dieses Rechtek; so trage man aus dem Punkt F auf die Seite von B die gerade Linie FG gleich der Linie M, und auf eben diese Seite aus dem Punkt E die gerade Linie EH gleich N. Ist nun (Fig. 65. b.) das Quadrat über AF gleich dem Rechtek GFE, so beschreibe man den Kreis CL, nemlich denjenigen von den beyden Kreisen, die mit einander den Ort für den 1sten Fall des 3ten Sazes ausmachen, welcher auf eben der Seite von F liegt, auf welcher B ist, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, das Quadrat über CF gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie GF, und dem Stük DF enthalten ist; ist aber (Fig. 65. c.) das Quadrat über AF kleiner als das Rechtek GFE; so beschreibe man nach der Komposition des ersten Theils des zweyten Falls jenes Sazes den Kreis CL so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die gerade Linie CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, das Quadrat über CF gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie GF, und dem zwischen CD und dem gegebenen Punkt H abgeschnittenen Stük DH enthalten ist: so wird der Umfang von einem dieser Kreise, je nachdem es der Fall erfodert, der gesuchte Ort seyn, und zwar der einzige Ort, wenn die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks GFE nicht kleiner ist, als das Quadrat über KF dem Halbmesser eines Kreises, dessen über FG beschriebener Abschnitt einen Winkel faßt gleich dem gegebenen Winkel CDF. Ist aber (Fig. 65. d.) die

die Summe des Quadrats über AF, und des Rechteks GFE kleiner, als das Quadrat über KF, so nehme man Fg gleich FG und Eh gleich EH, und beschreibe nach dem 2ten Theil der Komposition für den 2ten Fall des angeführten 3ten Sazes den Kreis, welcher dort der Ort ist; so wird dessen Umfang so wohl als derjenige von den beyden vorhin gefundenen Umkreisen, welcher für den jedesmahligen Fall gehört, der gesuchte Ort seyn. Ist aber (Fig. 65. e.) das Quadrat über AF grösser als das Rechtek, das zwischen den geraden Linien M, FE enthalten ist; so muß, wenn es möglich seyn soll den Ort zu verzeichnen, das Quadrat über AF kleiner seyn, als die Summe des Quadrats über KF und des Rechtekes GFE, wie vorhin gezeigt worden. Es seye demnach so, und man nehme die Linien FG, EH nach der besagten Richtung, und beschreibe nach dem 2ten Theil des 3ten Sazes den Kreis, der dort der Ort ist; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, und zwar der einzige Ort, wenn die Summe des Quadrats über AF und des Rechteks GFE nicht kleiner ist, als das Quadrat über KF. Ist aber diese Summe kleiner, als das Quadrat über KF, so nehme man Fg gleich FG, und Eh gleich EH, und beschreibe nach dem angeführten 2ten Theil des 2ten Falls einen Kreis, der für den Punkt h der zugehörige Ort seye; so werden diese beyden Umkreise der gesuchte Ort seyn.

Figg. 65. a—e.

Es muß also bewiesen werden, daß, wenn man auf jedem der angeführten Umkreise irgend einen Punkt C nimmt, und an diesen die geraden Linien AC, BC, und CD mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend zieht, daß, sage ich, die Summe der Quadrate über AC, BC gleich seye dem Rechtek, das zwi-

zwischen der gegebenen geraden Linie, d. i. zwischen einer Linie, die doppelt so groß ist, als FG, und zwischen dem Stük ED enthalten ist, dessen einer Endpunkt der gegebene Punkt E ist. Diß läßt sich nun so für alle Fälle erweisen. Nach der Verzeichnung, nemlich vermittelst des 3ten Sazes ist das Quadrat über FC gleich dem Rechtek GF×DH; es ist aber das Quadrat über AF gleich dem Rechtek GF×EH; also ist die Summe der Quadrate über AF, FC gleich dem Rechtek GF×ED. Mithin ist die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC, d. i. nach dem 6ten Lehns. die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem Rechtek 2. FG×ED.

2. Fall. Wenn die der Lage nach gegebene Linie, auf welcher das Stük abgeschnitten wird, nicht durch den Punkt geht, der AB in zwey gleiche Theile theilt, und das übrige bleibt, wie bey dem vorhergehenden Fall.

Fig. 65. f.

Es seyen aus den gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und aus C, CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, CD schneide auf einer andern der Lage nach gegebenen Linie ein Stük DE ab, dessen anderer Endpunkt E gegeben seye, und die Summe der Quadrate über AC, BC seye gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie, nemlich zwischen der doppelt genommenen Linie M, und zwischen dem Stük DE enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man theile AB in F in zwey gleiche Theile, und ziehe FC; so ist folglich die doppelte Summe der Quadrate über AF, FC gleich der Summe der Quadrate über AC, BC nach dem 6ten Lehns., d. i. nach der Voraussezung, gleich dem Rechtek, das zwischen der doppelten Linie M und zwischen DE enthalten ist. Also ist

ist die Summe der Quadrate über AF, FC gleich dem Rechtek, das zwischen M, und DE enthalten ist. Es seye das zwischen M, und EH enthaltene Rechtek gleich dem Quadrat über AF; so ist der Rest, nemlich das Quadrat über FC gleich dem zwischen M und DH enthaltenen Rechtek.

Weil also aus einem gegebenen Punkt F eine gerade Linie FC, und aus ihrem Endpunkt C eine gerade mit einer der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffende Linie CD gezogen ist, die auf einer geraden Linie, die nicht durch den Punkt F geht, ein Stük DH abschneidet, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist, und das Quadrat über FC gleich ist dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie M, und zwischen DH enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Kreis nach dem 3ten Fall des 3ten Sazes unsers IIten Buchs. Und nach geschehener Verzeichnung, durch welche jener dritte Fall auf den zweyten zurük gebracht wird, wird dieser Fall völlig eben so erwiesen werden, wie der vorhergehende.

3. Fall. Wenn die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind, und das übrige bleibt, wie bey einem der vorhergehenden Fälle.

Fig. 65. g.

Aus den gegebenen Punkten A, B seyen an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC, und durch C, CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, CD schneide auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie ein Stük DE ab, dessen anderer Endpunkt E gegeben seye, und es seye die Summe der über AC, BC beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie, und zwischen dem Stük DE ent-

enthalten ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seye a die über AC, b die über BC beschriebene Figur; so sind (53. D.) die Verhältnisse von a zu dem Quadrat über AC, und von b zu dem Quadrat über BC gegeben; folglich, weil AB der Lage und Grösse nach gegeben ist, so ist nach dem 9ten Lehns. ein Punkt gegeben, der AB in 2 Stüke theilt, die zu einer gegebenen geraden Linie diese Verhältnisse haben. Es seye diß der Punkt F, und FM die gegebene gerade Linie, so nemlich, daß BF sich zu FM verhalte, wie a zu dem Quadrat über AC, und AF zu FM, wie b zu dem Quadrat über BC. Man ziehe FC; so ist (Zus. 10. Lehns.) die Summe der Figuren a, b gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, welcher zu dem Quadrat über FC das gegebene Verhältniß von AB zu FM hat. Nach der Voraussezung aber ist die Summe der Figuren a, b gleich dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie (sie mag FN seyn), und zwischen dem Stük DE enthalten ist. Also ist das Rechtek FN×DE gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über FC ein gegebenes Verhältniß hat. Es seye dieser gegebene Raum gleich dem Rechtek FN×EH; so ist folglich EH und der Punkt H gegeben, und das Rechtek FN×DH ist gleich dem Raum, der zu dem Quadrat über FC das gegebene Verhältniß hat. Wie sich also DH zu FC verhält, so verhält sich FC zu einer geraden Linie FG, zu welcher FN das gegebene Verhältniß hat (63. D.). Nun ist FN gegeben, also auch FG; es ist aber das Rechtek FG×DH gleich dem Quadrat über FC. Weil also aus einem gegebenen Punkt F die gerade Linie FC, und aus ihrem Endpunkt C eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist, und das Quadrat über FC gleich

ist

ist dem Rechtek, das zwischen einer gegebenen geraden Linie FG, und zwischen dem Stük DH enthalten ist, dessen anderer Endpunkt H gegeben ist: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 3ten Saz dieses IIten Buchs.

Komposition.

Ueber einer und ebenderselben geraden Linie OP seyen zwey Figuren Q, R beschrieben, von diesen seye Q diejenige, welcher die Figur über AC und R diejenige, welcher die Figur über BC ähnlich seyn soll. Und, nach dem 9ten Lehns. bestimme man auf der Linie AB den Punkt F und die Linie FM so, daß BF sich zu FM, wie Q zu dem Quadrat über OP, und AF sich zu FM verhalte, wie R zu dem Quadrat über OP. FN seye gleich der gegebenen geraden Linie, und man nehme FG : FN = FM : AB. Ueber AF seye eine Figur c ähnlich der Figur Q, und über FB seye eine Figur d ähnlich der Figur R, und man mache das Rechtek FN × EH gleich der Summe der Figuren c, d. Nach dem dritten Saz dieses Buchs beschreibe man einen Umkreis, so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt C desselben an F die gerade Linie CF, und an FG die Linie CD mit der der Lage nach gegebenen Linie gleichlauffend zieht, daß dann das Quadrat über FC gleich seye dem Rechtek, das zwischen der gegebenen Linie FG und dem Stük DH enthalten ist, welches zwischen der Linie CD und dem gegebenen Punkt H abgeschnitten ist; so wird dieser Umkreis der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man AC, BC zieht, und über denselben die Figuren a, b beschreibt, wovon a der Figur Q, b aber der Figur R ähnlich ist; so wird die Summe der Figuren a, b gleich seyn dem Rechtek, das zwischen der gegebenen geraden Linie FN, und dem Stük DE enthalten ist. Denn nach der Verzeichnung

ist

ist AB : FM = (FN : FG, d. i. =) FN×DH : FG×DH, d. i. = FN×DH : FC². Also ist das Rechtek FN×DH derjenige Raum, der sich zu dem Quadrat über FC verhält, wie AB zu FM. Nach dem 10ten Lehns. aber ist die Summe der Figuren a, b gleich der Summe der Figuren c, d, und des Raums, der sich zu dem Quadrat über FC verhält, wie AB zu FM. Nun ist nach der Verzeichnung die Summe der Figuren c, d gleich dem Rechtek FN×EH. Mithin ist die Summe der Figuren a, b gleich der Summe der Rechteke FN×EH, FN×DH, d. i. gleich dem Rechtek FN×ED.

Berechnung.

1. und 2. Fall. Man nehme FG = der Hälfte der gegebenen Linie, und $EH = N = \frac{AF^2}{FG} = \frac{AB^2}{4FG}$, und verfahre dann nach dem 3ten Saz des IIten Buchs.

3. Fall. Es verhalte sich die Figur über AC zu dem Quadrat über AC wie $\alpha : 1$, und die Figur über BC zu dem Quadrat über BC wie $\beta : 1$; so ist

$$AF : FM = \beta : 1$$
$$FM : BF = 1 : \alpha$$

mithin $AF : BF = \beta : \alpha$, und $AB : BF = \alpha+\beta : \alpha$, folglich $BF = \frac{\alpha AB}{\alpha+\beta}$, $AF = \frac{\beta AB}{\alpha+\beta}$. Und, weil $FG : FN = FM : AB = 1 : \alpha + \beta$; so ist $FG = \frac{FN}{\alpha+\beta}$. Ferner ist die Figur c, welche sich zu dem Quadrat über AF verhält, wie $\alpha : 1 = \frac{\alpha\beta^2 . AB^2}{(\alpha+\beta)^2}$,

 und

und eben so die Figur $d = \frac{\beta\alpha^2 AB^2}{(\alpha+\beta)^2}$; folglich ist $FN \times EH = c + d = \frac{\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta}$, mithin $EH = \frac{\alpha\beta . AB^2}{(\alpha+\beta)FN}$, und nun verfahre man nach dem 3ten Saz des IIten Buchs.

7ter Saz des IIten Buchs, wie er in der Vorrede des Pappus von Alexandrien, die Halley den zwey Büchern de sectione rationis vordruken ließ, S. 39. steht:

> Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch diesen Punkt jede beliebige gerade Linie zieht, und auf dieser Linie einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks entweder gleich ist dem Rechtek, das zwischen der ganzen Linie und dem äussern durch den Kreis abgeschnittenen Stük enthalten ist, oder der Summe dieses Rechteks, und des zwischen den innern Stüken enthaltenen Rechteks: so berührt der ausserhalb des Kreises genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 66. a.

Dieser Ort ist nicht nur in Kommandins, Fermats, und Schootens Uebersezungen, sondern auch in Halleys griechischem Text, und, wie es scheint, in den Mscpten selbst ganz fehlerhaft. Denn man kann nicht auf jeder beliebigen geraden Linie, die durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt geht, einen Punkt ausserhalb des Kreises so nehmen, daß die in dem 2ten Fall des Sazes verlangte Bedingung dabey Statt fände; sondern diß geht blos bey derjenigen geraden Linie an,

an, welche mit dem Durchmesser, der durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt geht, einen rechten Winkel macht. Denn es seye der Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, der Lage nach, und innerhalb desselben der Punkt B gegeben, durch B ziehe man irgend eine gerade Linie BC, die mit dem durch B gezogenen Durchmesser keinen rechten Winkel mache, so kann auf dieser Linie kein Punkt seyn, so, daß das Quadrat des zwischen diesem Punkt und B abgeschnittenen Stüks gleich wäre der Summe des Rechteks, das zwischen den Stüken enthalten ist, die zwischen diesem Punkt, und den Punkten D, E, in welchen die gerade Linie dem Kreis begegnet, abgeschnitten sind, und des Rechteks EBD, das zwischen den innern Stüken enthalten ist. Denn, wenn ein solcher Punkt möglich ist, so seye es C, man ziehe die Linie AB, und fälle auf ihre Verlängerung das Perpendikel CF, und es begegne AB dem Kreis in den Punkten G, H, ferner ziehe man AC die dem Kreis in den Punkten K, L begegne. Weil nun das Rechtek LCK gleich ist dem Rechtek ECD (36, 3. E.) und das Quadrat über AK oder AG gleich ist der Summe des Rechteks HBG, oder EBD und des Quadrats über AB (5, 2. E.); so ist, gleiches zu gleichem hinzu gesezt, die Summe des Rechteks LCK und des Quadrats über AK, d. i. (6, 2. E.) das Quadrat über AC gleich der Summe der Rechteke ECD, EBD und des Quadrats über AB; nach der Voraussezung aber ist die Summe der Rechteke ECD, EBD gleich dem Quadrat über BC; also ist das Quadrat über AC gleich der Summe der Quadrate über BC und AB, mithin ist der Winkel ABC ein rechter (48, 1. E.). Es ist aber dieser Winkel nach der Voraussezung kein rechter, und diß ist widersprechend. Es giebt folglich auf der Linie BD keinen Punkt, der die Bedingung des Sazes erfüllte. Mithin ist es unrichtig, was Fermat bey dem Anfang dieses 7ten Sazes

in den wiederhergestellten ebenen Oertern des Apollonius S. 42. seiner Oper. Var. Mathem. behauptet, daß nemlich der 2te Theil dieses Orts sich leicht durch Hinzufügung gleicher Grössen aus dem ersten herleiten lasse, denn dieser 2te Theil enthält, wie gezeigt worden, einen Widerspruch. Eben so führt Schooten wahrhaftig ganz am unrechten Ort eine Aufgabe an S. 291 seiner Exercit. Mathem., als ob sie den Sinn von diesem Ort des Apollonius enthielte, denn bey ihm ist die durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt gezogene gerade Linie, auf welcher er den Punkt ausserhalb des Kreises annimmt, der Lage nach gegeben, nemlich senkrecht auf dem Durchmesser, der durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt gezogen ist, wie oben gezeigt worden. Der Saz aber ist gar nicht von Punkten zu verstehen, von welchen einer wo man will nur auf einer einzigen (der Lage nach bestimmten) geraden Linie genommen wird, die durch den innerhalb des Kreises gegebenen Punkt gezogen ist; sondern von Punkten, von denen einer auf jeder nach Belieben durch den gegebenen Punkt gezogenen geraden Linie bestimmt werden muß, wie man aus dem ersten Theil dieses Orts sieht, über dessen Sinn gar kein Zweifel ist.

Wenn es aber in einem besondern aus den Bedingungen des Orts herrührenden Fall geschieht, daß die gerade Linie, welche der Ort der Punkte ist, die auf geraden aus dem gegebenen Punkt gezogenen Linien liegen, durch diesen gegebenen Punkt geht; alsdann verwandelt sich dieser Ort in einen Lehrsaz, wie wir bey dem Ort, der in dem folgenden 9ten Saz vorkommt, bemerken können, denn selbiger Ort verwandelt sich in einem gewissen Fall in Schootens Saz.

Ich fand aber, daß sich in den griechischen Text ein Fehler eingeschlichen habe, denn statt der Worte ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τέτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ, muß gelesen werden ἢ

τὸ μόνον ἢ τῦτό τε καὶ τὸ ὑπὸ, und mit dieser Veränderung heißt dann der Ort, wie folgt.

Apollonius 7ter Saz des IIten Buchs.

Wenn innerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch diesen Punkt jede beliebige gerade Linie zieht, und auf dieser Linie einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt; und wenn entweder das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks allein, oder die Summe dieses Quadrats und des zwischen den beyden innern Stüken enthaltenen Rechteks, gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen der ganzen Linie, und zwischen dem äussern durch den Kreis abgeschnittenen Stük: so berührt der ausserhalb des Kreises genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 66. b.

Ister Theil. Der Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, seye der Lage nach, und innerhalb dieses Kreises der Punkt B gegeben, durch diesen Punkt ziehe man irgend eine gerade Linie, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne, und ausserhalb des Kreises auf der Verlängerung von CD seye ein Punkt E so, daß das Quadrat über EB gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe und verlängere die Linie AB, fälle auf sie aus dem Punkt E das Perpendikel EF, und es begegne AB dem Kreis in den Punkten G, H, man ziehe GE, und diese Linie begegne dem Kreis in K, endlich ziehe man HK. Weil nun das Quadrat über GE gleich ist der Summe der Quadrate über GF, FE; so ist (2, 2. E.) die Summe der Rechteke EGK; GEK gleich

gleich der Summe der Rechteke FGH, GFH und des Quadrats über FE, hievon sind die Rechteke EGK, und FGH einander gleich (denn die Punkte F, H, K, E liegen wegen den rechten Winkeln bey F, K auf dem Umfang eines Kreises), mithin ist das Rechtek GEK gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE. Es ist aber das Rechtek GEK gleich dem Rechtek CED, d. i. nach der Voraussezung dem Quadrat über BE, d. i. der Summe der Quadrate über BF, FE; also ist die Summe der Quadrate über BF, FE gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE; mithin das Quadrat über BF gleich dem Rechtek GFH; und, das gemeinschaftliche Rechtek BFH hinweg genommen, ist der Rest, nemlich das Rechtek HBF, gleich dem Rechtek, das zwischen GB und HF enthalten ist. Folglich verhält sich HB zu BG wie HF zu FB, und HB, BG sind gegeben, also ist das Verhältniß von HF zu FB gegeben, es ist aber BH gegeben, mithin ist (6, 2. D.) BF und der Punkt F gegeben, also ist auch EF der Lage nach gegeben (32, D.).

Komposition.

Durch die Punkte A, B ziehe man eine gerade Linie, die dem Kreis in den Punkten G, H begegne, und man nehme BF : FH = GB : BH, durch den Punkt F ziehe man eine gerade Linie senkrecht auf BF: so wird diese der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man auf ihr irgend einen Punkt E nimmt, und die gerade Linie EB zieht, die dem Kreis in den Punkten D, C begegne; so wird das Quadrat über BE gleich seyn dem Rechtek CED. Denn, weil nach der Verzeichnung GB : BH = BF : FH, so ist das Rechtek FBH gleich dem Rechtek GB×FH; man seze beyderseits das Rechtek BFH hinzu; so ist folglich das Quadrat über BF gleich dem Rechtek

Rechtek GFH; also ist die Summe des Quadrats über BF und des Quadrats über FE, d. i. das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks GFH, und des Quadrats über FE, d. i. gleich dem Rechtek GEK, oder CED, wie bey der Analyse gezeigt worden. Eben diß erweist Pappus im 159sten Saz seines 7ten Buchs.

Fig. 66. c.

IIter Theil. Es seye die Summe des Quadrats über EB und des Rechteks CBD gleich dem Rechtek CED, das übrige bleibe wie vorhin, so berührt ebenfalls der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es bleibe dieselbe Verzeichnung, weil nun die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CBD gleich ist dem Rechtek CED; so ist die Summe der Quadrate über BF, FE und des Rechteks GBH (35, 3. E.) gleich dem Rechtek CED, d. i. gleich der Summe des Rechteks GFH und des Quadrats über FE. Man nehme das gemeinschaftliche Quadrat über FE hinweg, so ist die Summe des Quadrats über BF und des Rechteks GBH gleich dem Rechtek GFH; man seze das Quadrat über AH beyderseits hinzu, so ist die Summe der Quadrate über BF, AB und des doppelten Rechteks GBH (5, 2. E.) gleich dem Quadrat über AF (6, 2. E.). Man nehme die Quadrate über AB, BF hinweg; so ist das doppelte Rechtek GBH gleich dem doppelten Rechtek ABF (4, 2. E.), mithin sind auch die Rechteke GBH, ABF selbst gleich. Nun ist GBH gegeben, mithin auch ABF, und, weil AB gegeben ist; so ist BF, und der Punkt F, mithin FE der Lage nach gegeben.

Komposition.

Man ziehe die Linie AB, diese begegne dem Kreis in den Punkten G, H, und man mache das Rechtek ABF gleich

gleich dem Rechtek GBH, auf AF errichte man das Perpendikel FE; so wird diß der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt E desselben durch B die gerade Linie EB zieht, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; so wird die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CBD gleich seyn dem Rechtek CED. Denn, weil das doppelte Rechtek GBH gleich ist dem doppelten Rechtek ABF; so ist, die Quadrate über AB, BF hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über AH, des Rechteks GBH, und des Quadrats über BF gleich dem Quadrat über AF; und das Quadrat über AH hinweg genommen, ist die Summe des Rechteks GBH und des Quadrats über BF gleich dem Rechtek GFH. Man seze noch das Quadrat über FE hinzu; so ist die Summe des Rechteks GBH, und der Quadrate über BF, FE, d. i. die Summe des Rechteks CBD, und des Quadrats über BE gleich der Summe des Rechteks GFH, und des Quadrats über FE, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Es kann aber der vorhergehende Saz auf folgende Art noch allgemeiner gemacht und erwiesen werden.

Wenn innerhalb, oder ausserhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch denselben irgend eine gerade Linie zieht, auf welcher man einen Punkt ausserhalb des Kreises nimmt, und von diesem Punkt eine gerade Linie zieht, die dem Kreis begegnet, und wenn dann das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks gleich ist dem Rechtek, das zwischen denjenigen Stüken der geraden an den Kreis gezogenen Linie enthalten ist, die durch den Umfang des Kreises und durch die gerade Linie, die durch den gegebenen Punkt gezogen ist, abgeschnitten werden: oder, wenn das genannte Quadrat um einen gegebenen Raum grösser oder kleiner ist, als das genannte Rechtek: oder, wenn die Summe des Quadrats und des Rechteks

eks gleich ist einem gegebenen Raum, nur, daß in diesem lezten Fall die gerade durch den gegebenen Punkt gezogene Linie dem Kreis begegnen, und auf derselben ein Punkt innerhalb des Kreises genommen werden muß: so berührt der genommene Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es kann aber dieser Saz in folgende 4 Säze getheilt werden, von welchen der erste seyn mag unser

7. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem ersten Theil von Apollonius 7tem Saz des 2ten Buchs.

Fig. 67. a. b. c.

Es seye der Kreis, dessen Mittelpunkt A ist der Lage nach, und innerhalb oder ausserhalb desselben ein Punkt B gegeben, durch B seye irgend eine gerade Linie gezogen, und auf derselben ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus diesem Punkt eine gerade Linie ECD an den Kreis zieht, das Quadrat über BE gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe AB, und die Linie AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne. Weil nun das Quadrat über EB gleich ist dem Rechtek CED, d. i. (36, 3. E.) dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AG beyderseits hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über EB, AG gleich der Summe des Rechteks FEG und des Quadrats über AG, d. i. (6, 2. E.) gleich dem Quadrat über AE, welches also um einen gegebenen Raum, nemlich um das Quadrat über AG grösser ist, als das Quadrat über EB. Weil also aus zwey gegebenen Punkten

A, B zwey gerade Linien AE, BE gezogen sind, und der Unterschied ihrer Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz unsers IIten Buchs.

Komposition.

Man ziehe vermittelst der Komposition des ersten Sazes dieses IIten Buchs die gerade Linie EH, welche der Ort ist von den Punkten, die so beschaffen sind, daß, wenn man aus irgend einem derselben E an die gegebenen Punkte A, B gerade Linien zieht, daß dann das Quadrat über AE um das Quadrat des Halbmessers des gegebenen Kreises grösser seye, als das Quadrat über BE (diß wird nemlich geschehen, wenn man AB in K in zwey gleiche Theile theilt, AK bis H verlängert, so, daß das doppelte Rechtek KH×AB gleich seye dem Quadrat des Halbmessers AL, und dann HE senkrecht auf AH zieht); so wird HE der gesuchte Ort seyn. Denn nach der Verzeichnung ist, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht, die Summe der Quadrate über EB, AL gleich dem Quadrat über AE, mithin, wenn man das Quadrat über AL oder AG hinweg nimmt, so ist das Quadrat über EB gleich dem Rechtek FEG, d. i. gleich dem Rechtek CED.

Daß aber der Punkt H, folglich die gerade Linie HE immer ausserhalb des Kreises falle, wird so erwiesen. Erstens, wenn der Punkt K innerhalb des Kreises fällt, d. i. wenn AL grösser ist als LB, weil nemlich AB in K in zwey gleiche Theile getheilt ist; so ist (8, 2. E.) das Quadrat über BK und KL als einer Linie, d. i. das Quadrat über AL grösser als das 4fache Rechtek BK×KL; es ist aber das doppelte Rechtek KH×AB,

d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich dem Quadrat über AL; mithin ist das 4fache Rechtek BKH grösser, als das 4fache Rechtek BKL, also KH grösser, als KL, und der Punkt H fällt ausserhalb des Kreises. Ist aber AL kleiner als LB, d. i. fällt der Punkt K ausserhalb des Kreises; so ist für sich klar, daß der Punkt H, der auf der Verlängerung von LK liegt, ebenfalls ausserhalb des Kreises falle. (Eben diß gilt, wenn AL gleich LB, d. i. wenn die Punkte K und L zusammen fallen. A. d. U.) Weil aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, das Quadrat über AL kleiner ist als das Quadrat über AB; so ist das 4fache Rechtek BKH kleiner als das 4fache Quadrat über BK, mithin KH kleiner, als KB, und der Punkt H fällt zwischen die Punkte L und B.

8. Saz.

Ein Theil dieses Sazes ist einerley mit dem 2ten Theil von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs.

Figg. 68. a. b. c. d.

Es seye der Punkt B innerhalb, oder ausserhalb des Kreises gegeben, und durch denselben irgend eine gerade Linie gezogen, auf dieser Linie seye ausserhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß, wenn man aus demselben die gerade Linie ECD an den Kreis zieht, die Summe des Quadrats über BE und eines gegebenen Raums P gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Man ziehe die Linie AB, diese begegne dem Kreis in den Punkten M, L, und AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne; weil nun die Summe des Quadrats über EB und des gegebenen Raums P gleich ist

dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG; so ist, das Quadrat über AL oder AG hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über EB, des gegebenen Raums P, und des Quadrats über AL gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um einen gegebenen Raum, nemlich um die Summe des gegebenen Raums P und des Quadrats über AL grösser, als das Quadrat über EB. Folglich berührt der Punkt E nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man nehme AN so, daß das Quadrat über AN gleich seye der Summe des Raums P und des Quadrats über AL, theile AB in K in zwey gleiche Theile, und verlängere AK bis an den Punkt H so, daß das doppelte Rechtek AB×KH, d. i. das 4fache Rechtek BKH gleich seye dem Quadrat über AN und ziehe HE senkrecht auf AH; so ist HE der gesuchte Ort. Denn, wenn man auf HE irgend einen Punkt E nimmt, und die geraden Linien AE, BE zieht; so ist nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, AN gleich dem Quadrat über AE, d. i. nach der Verzeichnung die Summe der Quadrate über BE, AL und des gegebenen Raums P ist gleich dem Quadrat über AE, und das Quadrat über AL oder AF hinweg genommen, ist die Summe des Quadrats über BE, und des gegebenen Raums P gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Es wird aber der Punkt H, also die gerade Linie HE immer ausserhalb des Kreises fallen auch in dem Fall, wenn K innerhalb des Kreises liegt, denn wenn K ausserhalb (oder auf dem Umfang) des Kreises liegt, so ist die Sache für sich klar. Denn das 4fache Rechtek

BKH

BKH ist grösser als das Quadrat über AL, d. i. grösser als das Quadrat über BK und KL als einer Linie. Also ist noch weit mehr (8, 2. E.) das 4fache Rechtek BKH grösser, als das 4fache Rechtek BKL; folglich KH grösser als KL.

Fig. 68. c.

Wenn aber der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, und der gegebene Raum P gleich ist dem Rechtek MBL, das enthalten ist zwischen den Stüken, die zwischen den Punkt B und dem Umkreis abgeschnitten sind; so ist die Summe des Quadrats über BE, des Rechteks MBL, und des Quadrats über dem Halbmesser AL, d. i. (6, 2. E.) die Summe der Quadrate über BE, BA gleich dem Quadrat über AE; folglich ist ABE ein rechter Winkel (48, 1. E.) mithin die gerade Linie BE der Lage nach gegeben, also geht der Ort in diesem Fall in folgenden Lehnsaz über:

Wenn aus einem ausserhalb des Kreises gelegenen Punkt B eine gerade Linie BE auf den durch B gezogenen Durchmesser MAL senkrecht, und aus irgend einem Punkt E dieser Linie eine gerade Linie EDC gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegnet; so ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek CED. Denn, die Summe der Quadrate über BE, BA ist gleich dem Quadrat über AE, und, beyderseits das Quadrat über AL oder AF weggenommen, ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks MBL gleich dem Rechtek FEG, oder CED.

Figg. 68. d. a.

Ist aber in dem Fall, wenn der Punkt B ausserhalb des Kreises liegt, der gegebene Raum P kleiner, als

als das Rechtek MBL; so fällt die Linie EH zwischen L und B. Ist der gegebene Raum grösser, als dieses Rechtek; so fällt EH auf die nach der Seite von B hin verlängerte Linie LB. Denn, weil das 4fache Rechtek BKH nach der Verzeichnung gleich ist der Summe des Raums P und des Quadrats über AL; so ist, je nachdem der Raum P kleiner oder grösser ist, als das Rechtek MBL, das 4fache Rechtek BKH kleiner oder grösser als (die Summe des Rechteks MBL und des Quadrats über AL, d. i. kleiner oder grösser, als das Quadrat über AB, oder) als das 4fache Quadrat über BK, mithin ist KH kleiner oder grösser als KB, und der Punkt H liegt im ersten Fall zwischen K und B, im 2ten auf der nach B hin verlängerten Linie KB.

9. Saz.

Es seye jezt das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe, wie beym 8ten Saz: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Figg. 69. a. b.

1. Es seye der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmessers AL; weil nun das Quadrat über BE gleich ist der Summe des Rechteks CED, oder FEG, und des Raums P; so ist, das Quadrat über AF oder AL hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, AL gleich der Summe des Quadrats über AE und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderseits den Raum P hinweg; so ist die Summe des Quadrats über BE, und des Ueberschusses des Quadrats von AL über den Raum P gleich dem Quadrat über AE; also ist das Quadrat über AE um diesen gegebenen Ueberschuß grösser,

grösser, als das Quadrat über BE. Mithin ist die Sache auf den 1sten Saz dieses IIten Buchs zurük gebracht, und vermittelst desselben wird die Auflösung gemacht werden, wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz.

Fig. 69. c.

Wenn aber der Punkt B innerhalb des Kreises liegt, und der Raum P gleich ist dem Rechtek MBL; so ist, nach der Voraussezung, das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, oder FEG, und MBL, mithin ist, das Quadrat über AL oder AF hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE und AL gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Rechteks MBL, und, das Rechtek MBL beyderseits hinweg genommen, ist das Quadrat über AE gleich der Summe der Quadrate über BE und AB, mithin (48, 1. E.) der Winkel ABE ein rechter, folglich BE der Lage nach gegeben. Also geht in diesem Fall der Ort in folgenden Lehrsaz über:

Wenn aus einem Punkt B auf dem Durchmesser MAL eines Kreises eine gerade Linie BE senkrecht auf diesem Durchmesser, und aus irgend einem Punkt derselben E ausserhalb des Kreises eine gerade Linie gezogen wird, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne; so ist das Quadrat über BE gleich der Summe der Rechteke CED, MBL. Denn die Summe der Quadrate über EB, BA ist gleich (dem Quadrat über AE, d. i. der Summe des Rechteks GEF, und des Quadrats über AF, d. i.) der Summe des Rechteks CED und des Quadrats über AL; man nehme beyderseits das Quadrat über AB hinweg; so ist das Quadrat über EB gleich der Summe der Rechteke CED, und MBL. Diß ist der Lehrsaz, den Schooten in die Stelle von Apollonius 7tem Saz des IIten Buchs sezte, und von diesem

diesem Lehrsaz ist in dem vorhergehenden genug gesagt worden.

Fig. 69. d.

2. Es seye der gegebene Raum P gleich dem Quadrat des Halbmessers AL, oder AF; so ist folglich das Quadrat über BE gleich dem Quadrat über AE, und BE gleich AE. Mithin berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie, nemlich ein auf der Mitte von AB errichtetes Perpendikel nach dem 1sten Fall des 2ten Sazes dieses IIten Buchs.

Figg. 69. e. f.

3. Es seye der gegebene Raum P grösser, als das Quadrat des Halbmessers, und ihr Unterschied seye der Raum Q. Weil also das Quadrat über BE gleich ist der Summe des Rechteks FEG, des Quadrats über dem Halbmesser AF, und des Raums Q; so ist das Quadrat über BE gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Raums Q: also berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs, und die Komposition geschieht wie bey dem vorhergehenden 8ten Saz. Es muß aber KH gegen A hin genommen werden, nemlich auf der Seite, die derjenigen entgegen gesezt ist, auf welcher KH vorhin genommen wurde.

10. Saz.

Figg. 70. a. b. c.

Endlich begegne die gerade Linie BE dem Kreise, und es seye auf derselben innerhalb des Kreises ein Punkt E genommen, und durch diesen die gerade Linie CED gezogen,

gezogen, die dem Kreise in den Punkten C, D begegne, und es seye die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED gleich einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Fig. 70. a.

1. Man ziehe die Linie AB, die dem Kreise in den Punkten M, L, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne. Und es seye 1) der gegebene Raum P kleiner, als das Quadrat des Halbmessers, und ihr Unterschied seye gleith dem Raum Q. Weil also die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED oder FEG gleich ist dem Raum P; so ist, das Quadrat über AE beyderseits hinzu gesezt, die Summe des Quadrats über AF oder AL, und des Quadrats über BE gleich der Summe des Quadrats über AE und des Raums P. Und, den Raum P hinweg genommen, ist die Summe des Quadrats über BE und des Raums Q gleich dem Quadrat über AE. Also berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs; und aus der dortigen Komposition erhellt, daß die gerade Linie EH, welche der Ort ist, auf die nach dem Punkt K hin, in welchem nemlich die gerade Linie AB in zwey gleiche Theile getheilt ist, verlängerte Linie AK falle, so, daß das 4fache Rechtek BKH gleich wird dem gegebenen Raum Q; es wird aber erfodert, daß H innerhalb des Kreises, d. i. zwischen K und L falle; es muß also das 4fache Rechtek BKH kleiner seyn als das 4fache Rechtek BKL, d. i. es muß der Raum Q, oder der Ueberschuß des Quadrats von AL über den Raum P kleiner seyn als (8, 2. E.) der Ueberschuß eben dieses Quadrats von AL über das Quadrat von BL. Folglich muß der Raum P grösser seyn, als das Quadrat über BL.

Fig. 70. b.

2. Es seye der gegebene Raum P gleich dem Quadrat des Halbmessers AL, oder AG; so ist folglich die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED, oder FEG gleich dem Quadrat über AG, und, das gemeinschaftliche Rechtek FEG hinweg genommen, ist das Quadrat über BE gleich dem Quadrat über AE, und BE gleich AE. Mithin berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie, nemlich das in der Mitte von AB errichtete Perpendikel nach dem 1sten Fall des 2ten Sazes dieses IIten Buchs.

Fig. 70. c.

3. Es seye der gegebene Raum P grösser, als das Quadrat des Halbmessers AL, oder AG, und ihr Unterschied seye gleich dem Raum Q. Weil also die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED, oder FEG gleich ist (dem Raum P, d. i.) der Summe des Quadrats über AG und des Raums Q; so ist, das gemeinschaftliche Rechtek FEG hinweg genommen, das Quadrat über BE gleich der Summe des Quadrats über AE, und des Raums Q; also berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz dieses IIten Buchs. Es muß aber KH gegen A hin genommen werden, nemlich auf derjenigen Seite, die der entgegen gesezt ist, auf welcher KH in dem ersten Fall genommen wurde. Die Kompositionen dieser 3 Fälle ergeben sich von selbst.

Noch giebt es einen andern allgemeinen, dem vorigen ähnlichen Saz, nemlich diesen:

Wenn innerhalb, oder ausserhalb eines Kreises ein Punkt gegeben ist, und man durch denselben irgend eine gerade Linie zieht, die dem Kreis begegnet, und auf derselben einen Punkt innerhalb des Kreises nimmt, und, wenn

wenn das Quadrat des zwischen diesen Punkten abgeschnittenen Stüks gleich ist dem Rechtek, das enthalten ist zwischen den Stüken, welche zwischen dem genommenen Punkt, und dem Kreis liegen: oder, wenn diß Quadrat um einen gegebenen Raum grösser oder kleiner ist, als diß Rechtek: oder wenn auf der durch den gegebenen Punkt nach Belieben gezogenen geraden Linie ein Punkt ausserhalb des Kreises genommen wird, und die Summe des Quadrats und des Rechteks gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der genommene Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Auch dieser Saz zerfällt in 4 Säze; von diesen seye der erste folgender.

11. Saz.

Figg. 71. a. b.

Es seye ein Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, der Lage nach, und innerhalb oder ausserhalb desselben ein Punkt B gegeben, durch B seye irgend eine gerade Linie gezogen, die dem Kreis in den Punkten C, D begegne, und auf CD innerhalb des Kreises ein Punkt E so genommen, daß das Quadrat über BE gleich seye dem Rechtek CED: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Man ziehe AB, und die Linie AE, die dem Kreis in den Punkten F, G begegne. Weil nun das Quadrat über EB gleich ist dem Rechtek CED, d. i. dem Rechtek FEG (35, 3. E.); so ist, das gemeinschaftliche Quadrat über AE hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über AE und EB gleich dem Quadrat über AG; es ist aber das Quadrat über AG gegeben: mithin berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis

nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes dieses IIten Buchs.

Komposition.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und verlängere AH, bis sie dem Kreise in den Punkten K, L begegne; so erhellet aus der Bestimmung dieses 5ten Sazes, daß das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner seyn müsse, als der gegebene Raum, d. i. kleiner seyn müsse als das Quadrat über AK; also muß das 4fach genommene Quadrat über AH, d. i. das Quadrat über AB kleiner seyn, als das 2fach genommene Quadrat über AK; folglich muß AB kleiner seyn, als die Diagonale des Quadrats über AK, und diß findet in dem Fall nothwendig immer Statt, wenn B innerhalb des Kreises liegt. Es seye also AB kleiner, als die Diagonale des Quadrats über AK; so ist die Hälfte des Quadrats über AB, d. i. das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner, als das Quadrat über AK; der Unterschied zwischen diesen beyden Räumen seye gleich dem doppelten Quadrat über MH, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser MH einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man aus irgend einem Punkt E desselben durch B eine gerade Linie zieht, die dem Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, in den Punkten C, D begegnet; so wird das Quadrat über EB gleich seyn dem Rechtek CED. Denn, weil nach der Verzeichnung der aus dem Mittelpunkt H beschriebene Kreis derjenige ist, dessen Umfang der in dem 1sten Fall des 5ten Sazes beschriebene Ort ist; so ist die Summe der Quadrate über AE, BE gleich dem Quadrat über AK oder AG, und, das Quadrat über AE hinweg genommen, ist das Quadrat über BE gleich dem Rechtek FEG, d. i. dem Rechtek CED.

Eben

Eben dieses wird man für die Punkte M, N, in welchen der Ort der geraden Linie AB begegnet, so erweisen; weil AB in H in zwey gleiche Theile getheilt ist, so ist die Summe der Quadrate über AM, MB gleich (9, oder 10, 2. E.) der doppelten Summe der Quadrate über AH, HM, d. i. dem Quadrat über AK; folglich ist, das Quadrat über AM hinweg genommen, das Quadrat über MB gleich dem Rechtek LMK. Und eben so wird man erweisen, daß das Quadrat über NB gleich seye dem Rechtek LNK. Und, weil die Summe der Quadrate über AM, MB gleich ist dem Quadrat über AK; so ist AM kleiner als AK, mithin fällt der Kreis NEM, welcher der Ort ist, ganz innerhalb des gegebenen Kreises, d. i. der Punkt E liegt immer innerhalb desselben.

12. Saz.

Figg. 71. a. b.

Es seye jezt die Summe des Quadrats über BE und eines gegebenen Raums P gleich dem Rechtek CED oder FEG, das übrige bleibe, wie in dem vorhergehenden Saz: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil die Summe des Quadrats über BE und des gegebenen Raums P gleich ist dem Rechtek FEG; so ist, beyderseits das Quadrat über AE hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, EA und des gegebenen Raums P gleich dem Quadrat über AG, oder AK; und, den Raum P beyderseits hinweg genommen, ist die Summe der Quadrate über BE, AE gleich einem gegebenen Raum, nemlich dem Ueberschuß des Quadrats von AK über den Raum P. Also berührt

 der

der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis, nach dem 5ten Saz dieses IIten Buchs.

Die Komposition geschiehet, wie bey dem vorhergehenden Saz. Man theile nemlich wieder AB in dem Punkt H in zwey gleiche Theile; so muß das 2fach genommene Quadrat über AH kleiner seyn, als der Ueberschuß des Quadrats von AK über den Raum P. Es seye also die Summe des doppelt genommenen Quadrats über AH und des doppelt genommenen Quadrats über HM gleich diesem Ueberschuß, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HM einen Kreis; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, welches völlig, wie bey dem vorhergehenden Saz erwiesen wird, so wie auch diß, daß der Kreis MEN, welcher der Ort ist, ganz innerhalb des gegebenen Kreises liege.

13. Saz.

Figg. 72. a. b. c.

Es seye das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks CED oder FEG, und eines gegebenen Raums P, das übrige bleibe wie vorhin; so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil das Quadrat über BE gleich ist der Summe des Rechteks FEG, und des gegebenen Raums P; so ist, beyderseits das Quadrat über AE hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, AE gleich der Summe des Quadrats über AG oder AL, und des gegebenen Raums P; also berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes dieses IIten Buchs.

Figg. 72. a. b.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und verlängere AH, daß sie den Kreis in den Punkten K, L schneide, von diesen Punkten seye K der von dem Punkt B entferntere; so erhellet aus der Bestimmung des angeführten Sazes, daß das doppelt genommene Quadrat über AH kleiner seyn muß als der gegebene Raum, d. i. als die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, und diß findet in dem Fall nothwendig immer Statt, wenn der Punkt B innerhalb des Kreises liegt. Ferner, weil erfodert wird, daß der Punkt E innerhalb des gegebenen Kreises liege, und HK die gröste gerade Linie ist, die aus dem Punkt H an den Umkreis KDL gezogen werden kann (7, oder 8, 3. E.), der Punkt H mag innerhalb, oder ausserhalb des Kreises liegen; so ist HK grösser, als HE; mithin ist die doppelte Summe der Quadrate über KH, HA, d. i. (10, 2. E.) die Summe der Quadrate über KA, KB grösser, als die doppelte Summe der Quadrate über EH, HA, d. i. (wie man aus der Komposition des 1sten Falls des 5ten Sazes sieht) grösser als die Summe des Quadrats über KA und des gegebenen Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat über KA hinweg; so ist das Quadrat über BK grösser als der Raum P. Eben so ist in dem Fall (Fig. 72. c.), wenn der Punkt H ausserhalb des Kreises liegt, LH (8, 3. E.) die kleinste gerade Linie, die aus dem Punkt H an den gegebenen Kreis gezogen werden kann, der Punkt E aber ist innerhalb dieses Kreises, mithin ist LH kleiner als HE; folglich die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL, d. i. (9, 2. E.) die Summe der Quadrate über AL, LB kleiner als die (doppelte Summe der Quadrate über AH, HE, d. i. kleiner, als die) Summe des Quadrats über AL, und des Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat

 über

über AL hinweg; so ist das Quadrat über LB kleiner als der Raum P. Wenn also der Ort soll verzeichnet werden können; so muß in allen Fällen das doppelt genommene Quadrat über AH kleiner seyn als die Summe des Quadrats über AL, und des Raums P, und das Quadrat über KB muß grösser seyn, als der Raum P; in dem Fall aber, wenn der Punkt H ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, muß überdiß das Quadrat über LB kleiner seyn, als eben dieser Raum P. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Figg. 72. a. b. c.

Es seye P der gegebene Raum, man theile AB in H in zwey gleiche Theile. Weil nun nach der voraus geschikten Bestimmung die Summe des Quadrats über AL und des Raums P grösser ist, als das doppelt genommene Quadrat über AH; so seye ihr Unterschied gleich dem doppelt genommenen Quadrat über HM, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HM einen Kreis, der der geraden Linie KL wieder in dem Punkt N begegne, und von den Punkten M, N seye N der näher bey A gelegene. Und, weil nach der Bestimmung das Quadrat über KB grösser ist, als der Raum P; so ist die Summe der Quadrate über BK, KA, d. i. die doppelte Summe der Quadrate über KH, HA grösser, als (die Summe des Quadrats über KA oder AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung grösser, als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HM. Also ist die gerade Linie KH grösser als HM, oder HN; folglich, wenn der Punkt H innerhalb des gegebenen Kreises liegt, dessen Durchmesser KAL ist; so liegt auch der Punkt N innerhalb desselben, also

also liegt der aus dem Mittelpunkt H beschriebene Kreis, oder wenigstens ein Theil desselben innerhalb des gegebenen Kreises. Liegt aber der Punkt H ausserhalb des gegebenen Kreises; so ist, weil nach der Bestimmung für diesen Fall, das Quadrat über LB kleiner ist als der Raum P, die Summe der Quadrate über AL, LB, d. i. die doppelt genommene Summe der Quadrate über AH, HL kleiner als (die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HN. Mithin ist HL kleiner, als HN; es ist aber gezeigt worden, daß HK grösser seye, als HN, folglich fällt der Punkt N zwischen K und L, mithin schneidet in diesem Fall der aus dem Mittelpunkt H beschriebene Kreis nothwendig den gegebenen Kreis. Diß voraus geschikt nehme man auf dem Umfang des beschriebenen Kreises irgend einen Punkt E innerhalb des gegebenen Kreises, dessen Mittelpunkt A ist, und ziehe BE, die dem Kreis, dessen Mittelpunkt A ist, in den Punkten C, D begegne, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne; so ist nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes dieses IIten Buchs die Summe der Quadrate über BE, EA gleich der Summe des Quadrats über AK, oder AF, und des gegebenen Raums P; man nehme das gemeinschaftliche Quadrat über AE hinweg; so ist das Quadrat über BE gleich der Summe des Rechteks FEG oder CED und des Raums P.

Es ist aber zu bemerken, daß in dem Fall, wenn der Punkt H innerhalb des Kreises fällt, das Quadrat über LB grösser oder kleiner seyn kann, als der Raum P; folglich kann LH grösser, gleich, oder kleiner seyn, als HM, im ersten Fall wird der Kreis, welcher der Ort ist, ganz innerhalb des gegebenen Kreises fallen, im 2ten ihn innerhalb berühren, im 3ten aber ihn schneiden. Diß erweißt man auf eben die Art, wie vorhin

erwiesen wurde, daß LH kleiner seye als HN, oder HM in dem Fall, wenn das Quadrat über LB kleiner ist, als der Raum P, und der Punkt H ausserhalb des Kreises liegt.

14. Saz.

Figg. 73. a — e.

Endlich seye die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks CED oder FEG gleich einem gegebenen Raum P; der Punkt E aber liege ausserhalb des gegebenen Kreises: so berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Denn, weil die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks FEG gleich ist dem gegebenen Raum P; so ist beyderseits das Quadrat über AG oder AK hinzu gesezt, die Summe der Quadrate über BE, AE gleich der Summe des Quadrats über AK und des Raums P, d. i. einem gegebenen Raum. Also berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes dieses IIten Buchs.

Man theile AB in H in zwey gleiche Theile; so erhellet aus der Bestimmung für den angeführten Fall des 5ten Sazes, daß in allen Fällen das doppelte Quadrat über AH kleiner seyn müsse, als die Summe des Quadrats über AK und des Raums P. Und, wenn der Punkt H innerhalb des gegebenen Kreises liegt; so muß, da HL die kleinste Linie ist, die aus dem Punkt H an den Umkreis gezogen werden kann, und der Punkt E ausserhalb des Kreises liegt, nothwendig HL kleiner seyn als HE. Folglich ist die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL, d. i. die Summe der Quadrate über AL, BL kleiner, als (die doppelte Summe

der

der Quadrate über AH, HE, d. i. wie aus der Komposition des angeführten Falls erhellet, kleiner, als) die Summe des Quadrats über AL und des Raums P. Es muß also das Quadrat über BL kleiner seyn, als der Raum P. Diß voraus geschikt ist folgendes die

Komposition.

Es seye P der gegebene Raum; man theile AB in H in zwey gleiche Theile, und es seye der Ueberschuß der Summe des Quadrats von AK oder AL und des Raums P über das doppelt genommene Quadrat von AH gleich dem doppelt genommenen Quadrat von HM, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HM einen Kreis, der der geraden Linie KL wieder in dem Punkt N begegne, und von den Punkten M, N seye N der näher bey A gelegene. Liegt nun (Figg. 73. b. d. e.) der Mittelpunkt H des beschriebenen Kreises ausserhalb des gegebenen Kreises; so ist offenbahr, daß der beschriebene Kreis auf der Seite des Punkts H gegen B hin ausserhalb des gegebenen liege. Ist aber der Punkt H (Figg. 73. a. c.) innerhalb des gegebenen Kreises; so ist wegen der Bestimmung für diesen Fall, das Quadrat über BL kleiner als der Raum P, mithin ist die Summe der Quadrate über AL, BL, d. i. die doppelte Summe der Quadrate über AH, HL kleiner, als (die Summe des Quadrats über AL und des Raums P, d. i. nach der Verzeichnung kleiner, als) die doppelte Summe der Quadrate über AH, HM. Mithin ist diegerade Linie HL kleiner als HM, folglich liegt der aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HM beschriebene Kreis auf der Seite des Punkts L ausserhalb des gegebenen Kreises. Man nehme auf dem Umfang des beschriebenen Kreises irgend einen Punkt E ausserhalb des gegebenen Kreises, und ziehe BE, die dem gegebe-

gebenen Kreis in den Punkten C, D, und AE, die ihm in den Punkten F, G begegne; so ist nach dem 1sten Fall des 5ten Sazes die Summe der Quadrate über BE, EA gleich der Summe des Quadrats über AK und des Raums P. Man nehme beyderseits das Quadrat über AK oder AG hinweg; so ist die Summe des Quadrats über BE und des Rechteks FEG oder CED gleich dem gegebenen Raum P.

Es kann aber der Kreis, welcher der Ort ist, entweder den gegebenen Kreis einschliessen, (Figg. 73. a. d.) wenn nemlich der Raum P grösser ist, als das Quadrat über BK; oder sie können (Fig. 73. b.) beyde ganz ausserhalb einander liegen, wenn nemlich der Raum P kleiner ist als das Quadrat über BL, und der Punkt H ausserhalb des gegebenen Kreises liegt; oder endlich können (Figg. 73. c. e.) die beyden Kreise einander schneiden, nemlich, wenn der Raum P kleiner ist, als das Quadrat über BK, aber grösser als das Quadrat über BL, welches sich aus dem, was bey dem 13ten Saz gesagt worden, leicht wird einsehen lassen.

Simsons

Simsons Anhang.

Es schien mir der Mühe werth zu seyn, den Lehnsäzen zu dem 5ten Saz des IIten Buchs noch folgende 2 beizufügen, wodurch Pappus 7ter und 8ter Lehnsaz allgemeiner gemacht werden, weil sie bey Auflösung vieler Aufgaben und Oerter von sehr gutem Gebrauch sind. Hierzu sezte ich noch den 3ten, den man bey einigen Oertern nöthig hat, wenn statt der Summe der Quadrate oder der Räume im 5ten Saz des IIten Buchs der Ueberschuß von einigen derselben über die übrigen Quadrate oder Räume gegeben ist. Endlich kam noch ein 4ter hinzu, vermittelst dessen man den 33sten Saz des Isten Buchs auf jede beliebige Anzahl gerader Linien ausdehnen kann.

1. Lehnsaz.

Figg. 74. a. b.

Wenn auf einer geraden Linie AB 2 Punkte C, D sind, wovon C zwischen A und B liegt, und wenn CE irgend eine gerade Linie ist: so ist die Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AD verhält, wie BC zu CE, und eines andern, der sich zum Quadrat über BD verhält, wie AC zu CE, gleich der Summe eines Raums, der sich zum Quadrat über AC verhält, wie BC zu CE, und eines andern, der sich zum Quadrat über BC verhält, wie AC zu CE, und noch eines Raums, der sich zum Quadrat über CD verhält, wie AB zu CE.

Man

Man errichte CE senkrecht auf AC, und beschreibe durch die Punkte A, B, E einen Kreis, dem CE wieder in dem Punkt F begegne, ziehe dann AF, BF, und gleichlauffend mit CF die Linie DG, die den Linien AF, BF in den Punkten G, H begegne, und an DG ziehe man FK mit CB gleichlauffend; so ist das Rechtek FCA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AC verhält wie (FC zu CA, d. i. wie) BC zu CE; das Rechtek FCB ist der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über CB wie (FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE verhält. Und, weil

$BC : CE = (FC : CA, \text{d. i.} =) GK : \begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$, und

$AC : CE = (FC : CB, \text{d. i.} =) HK : KF$; so ist (24, 5. E.)

$AB : CE = GH : \begin{cases} KF \\ CD \end{cases}$. Mithin ist das Rechtek $GH \times KF$ der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über KF oder CD verhält, wie (GH zu KF, d. i. wie) AB zu CE. Ferner ist das Rechtek GDA der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie (GD zu DA, d. i. wie FC zu CA, d. i. wie) CB zu CE. Endlich ist das Rechtek HDB der Raum, welcher sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie (HD zu DB, d. i. wie FC zu CB, d. i. wie) AC zu CE. Es muß also bewiesen werden, daß die Summe der Rechteke GDA, HDB gleich seye der Summe der Rechteke FCA, FCB und $GH \times KF$. Oder, wenn man die Dreyeke nimmt, welche die Hälften dieser Rechteke sind; so muß bewiesen werden, daß die Summe der Dreyeke GDA, HDB gleich seye der Summe der Dreyeke AFB, GFH, welches nun für sich klar ist.

Zus. Wenn CE gleich ist CB; so ist dieser Lehnsaz einerley mit Pappus 7tem Lehnsaz. Ist aber CE gleich AB; so ist, wie gezeigt worden, die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält,

wie

wie BC zu CE, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AC zu CE gleich der Summe der Rechteke FCA, FCB, d. i. dem Rechtek FC×AB, d. i. (weil CE gleich ist AB) gleich dem Rechtek FCE oder ACB. Derjenige Raum aber, der sich zu dem Quadrat über CD verhält, wie AB zu CE, ist das Quadrat von CD selbst. In diesem Fall kann also der Lehnsaz so ausgedrükt werden:

Wenn auf einer geraden Linie AB 2 Punkte C, D genommen werden, wovon C zwischen A und B liegt; so ist die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BC zu BA, und eines andern, der sich zum Quadrat über BD verhält, wie AC zu AB gleich der Summe des Rechteks ACB und des Quadrats über CD.

Ehe ich den 10ten Lehnsaz gefunden hatte, bediente ich mich dieses Lehnsazes, um diejenigen Fälle des 5ten Sazes unsers IIten Buchs zu erweisen, in welchen die der Gattung nach gegebenen Figuren keine Quadrate sind. Andere Beweise dieses Lehnsazes fanden von mir aufgefodert vorlängst meine ehemaligen Schüler, Herr Jacob Moor, und Herr Matthäus Stevart, von welchen jener die griechische Sprache auf unserer Universität, dieser die Mathematik zu Edinburg mit vielem Ruhm lehrt. Der Beweis des Herrn Jacob Moor ist denen ähnlich, die bey dem 9ten und 10ten Saz des IIten Buchs von Euklids Elementen vorkommen, welche Säze nach seiner richtigen Bemerkung die einfachsten Fälle dieses Lehnsazes sind. Herr Stevart hat auch einen andern Beweis für den lezten Fall des 10ten Lehnsazes gegeben in dem 1sten und 2ten Saz seines Buchs de quibusdam Theorematibus generalibus etc. das zu Edinburg 1746. heraus kam, und dessen Gebrauch bey dem Beweis von einigen schönen Säzen gezeigt.

2. Lehn-

2. Lehnsaz.

Fig. 75.

Es seye eine gerade Linie AB der Lage und Grösse nach gegeben, und man nehme auf derselben, oder auf ihrer nach einer beliebigen Seite hin gemachten Verlängerung irgend einen Punkt C: so ist die Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat, und eines andern, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks ein gegebenes Verhältniß hat, das zwischen dem Punkt C, und einem auf AB gegebenen Punkt abgeschnitten ist.

Es seye M derjenige Raum, der zu dem Quadrat über AC, und N derjenige, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, und man finde nach dem 9ten Lehns. dieses IIten Buchs auf AB den Punkt D, und die gerade Linie DE, so, daß sich BD zu DE verhalte, wie M zu dem Quadrat über AC, und AD zu DE, wie N zu dem Quadrat über BC; so ist folglich der Punkt D gegeben. Und, nach dem vorhergehenden 1sten Lehnsaz ist die Summe von M, N gleich der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat über AD das gegebene Verhältniß von BD zu DE, eines andern, der zu dem Quadrat über BD das gegebene Verhältniß von AD zu DE, und noch eines dritten, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß von AB zu DE hat. Es sind aber die geraden Linien AD, DB gegeben, mithin auch ihre Quadrate, mithin auch die Räume, welche zu diesen Quadraten gegebene Verhältnisse haben. Also ist die Summe von M, N gleich der Summe dieser gegebenen Räume, und eines Raums, der zu dem Quadrat des Stüks CD, das zwischen C und dem

dem gegebenen Punkt D abgeschnitten ist, ein gegebenes Verhältniß hat.

3. Lehnsaz.

Fig. 63. a.

Wenn aus dem Scheitelpunkt C eines Dreyeks ABC irgend eine gerade Linie CD an die Grundlinie gezogen wird: so ist die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu BA, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu AB, gleich der Summe des Rechteks ADB und des Quadrats über DC.

Dieser Lehnsaz ist derjenige Fall des 10ten Lehnsazes unsers IIten Buchs, in welchem die Linie DE gleich ist der Linie AB, und wird aus dem dort bewiesenen so hergeleitet. Man mache dieselbe Verzeichnung, wie bey dem 10ten Lehns.; so ist dort bewiesen worden, daß die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich seye der Summe der Rechteke HDA, LDB, KCD, und MCD; von diesen hat, wie dort gezeigt worden, die Summe der Rechteke KCD, MCD zu dem Quadrat über DC das Verhältniß von AB zu DE, mithin ist in dem gegenwärtigen Fall die Summe der Rechteke KCD, MCD gleich dem Quadrat über DC. Und, weil dort erwiesen worden, daß HD gleich seye DL; so ist die Summe der Rechteke HDA, LDB gleich dem Rechtek HD×AB. Mithin ist die Summe der Rechteke FCA, GCB gleich der Summe des Rechteks HD×AB und des Quadrats über DC. Es ist aber HD : AD = (FC : CA, d. i. nach der Verzeichnung =) BD : $\begin{cases} DE \\ AB \end{cases}$. Mithin ist das Rechtek HD×AB gleich dem Rechtek ADB. Also ist die Summe des Rechteks FCA, d. i. eines Raums,

 der

der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu BA, und des Rechteks GCB, d. i. eines Raums, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu AB, gleich der Summe des Rechteks ADB und des Quadrats über DC. Auf ähnliche Art wird der lezte Fall des 10ten Lehnsazes, der ohne diesen Lehnsaz bewiesen worden, kürzlich so aus demselben hergeleitet. Es ist nemlich derjenige Fall des 10ten Lehnsazes, wenn DE gleich ist DB, und es muß gezeigt werden, daß die Summe des Quadrats über AC und eines Raums, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB oder DE, gleich seye der Summe des Rechteks BAD und eines Raums, der sich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Und diß erhellet leicht so. Weil die Summe eines Raums, der sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BD zu DE, und eines andern, der sich zu dem Quadrat über DB verhält, wie AD zu DE oder DB, gleich ist (3, 2. E.) dem Rechtek BAD; so ist nach dem 10ten Lehnsaz die Summe des Quadrats über AC, und eines Raums, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB, gleich der Summe des Rechteks BAD, und eines Raums, der sich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu DE oder DB.

4. Lehnsaz.

Fig. 76.

Wenn auf einer geraden Linie ein Punkt A genommen wird, und eine beliebige Anzahl Punkte B, C, D u. s. w. auf eben dieser Linie gegeben ist, und wenn die Summe der Räume gegeben ist, welche zu den Quadraten über den Stüken, die zwischen dem Punkt A und den gegebenen Punkten abgeschnitten sind, nemlich immer je ein Raum zu einem Quadrat, gegebene Verhältnisse haben; so ist der Punkt A gegeben.

1. Es

1. Es seyen 2 Punkte B, C gegeben, und es seye M derjenige Raum, der zu dem Quadrat über AB ein gegebenes Verhältniß hat, N derjenige, dessen Verhältniß zu dem Quadrat über AC gegeben ist; so ist folglich nach dem 2ten Lehns. des Anhangs auf BC ein Punkt R gegeben, so, daß die Summe von M und N gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat. Es ist aber die Summe von M und N gegeben, mithin ist der Raum gegeben, welcher zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat; folglich ist das Quadrat über AR, also AR selbst gegeben. Es ist aber der Punkt R gegeben, mithin ist auch A gegeben.

2. Es seyen 3 Punkte B, C, D gegeben, und es seyen M, N, O die Räume, welche zu den Quadraten über AB, AC, AD gegebene Verhältnisse haben. Es ist in dem vorhergehenden Fall gezeigt worden, daß die Summe von M und N gleich seye der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat. Mithin ist die Summe von M, N, O gleich der Summe eines gegebenen Raums, eines Raums, der zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß hat (dieser Raum heisse P) und des Raums O. Es ist aber die Summe von M, N, O der Voraussezung nach gegeben, mithin ist die Summe von P und O gleich einem gegebenen Raum. Es hat aber der Raum P zu dem Quadrat über AR ein gegebenes Verhältniß, und eben so ist das Verhältniß des Raums O zu dem Quadrat über AD gegeben; mithin ist nach dem 2ten Lehns. des Anhangs auf der geraden Linie RD ein Punkt Q gegeben, so, daß die Summe von O und P gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und eines Raums, der zu dem Quadrat über AQ ein gegebenes Verhältniß hat. Nun ist

gezeigt worden, daß die Summe von O, P gegeben seye. Mithin ist der Raum gegeben, der zu dem Quadrat über AQ ein gegebenes Verhältniß hat, also ist das Quadrat über AQ, folglich AQ selbst gegeben. Und, weil der Punkt Q gegeben ist; so ist auch der Punkt A gegeben. Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn 4, oder 5 u. s. w. Punkte gegeben sind.

1. Satz.

Fig. 77.

Wenn eine beliebige Anzahl gerader unter einander gleichlauffender Linien AB, CD, EF u. s. w. gegeben ist, und aus einem Punkt G an dieselbe die geraden Linien GH, GK, GL u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Räume gegeben ist, welche zu den Quadraten über diesen gezogenen Linien, nemlich je ein Raum zu einem Quadrat gegebene Verhältnisse haben: so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn man verlängere eine der gezogenen Linien LG, diese begegne den übrigen Parallelen in den Punkten M, N u. s. w. Weil nun das Dreyek GHM der Gattung nach gegeben ist; so ist das Verhältniß des Quadrats über GH zu dem Quadrat über GM gegeben; mithin hat der Raum, der zu dem Quadrat über GH ein gegebenes Verhältniß hat, auch zu dem Quadrat über GM ein gegebenes Verhältniß (9. D.). Eben so hat der Raum, der zu dem Quadrat über GK ein gegebenes Verhältniß hat, auch zu dem Quadrat über GN ein gegebenes Verhältniß u. s. w. Es sind aber auf jeder geraden Linie, die unter dem gegebenen Winkel GLE an die Parallelen durch irgend einen gegebenen Punkt L gezogen wird, die Punkte L, N, M u. s. w. gegeben.

gegeben. Weil also die Punkte L, N, M u. s. w. gegeben sind, und die Summe der Räume gegeben ist, welche zu den Quadraten über GM, GN, GL u. s. w. je ein Raum zu einem Quadrat gegebene Verhältnisse haben; so ist der Punkt G gegeben (4. Lehns. des Anh.), also ist die gerade Linie LG gegeben, welche unter einem gegebenen Winkel an die der Lage nach gegebene gerade Linie EF gezogen ist. Mithin berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 20sten Saz unsers Isten Buchs.

2. Saz.

Figg. 78. a. b.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin zwey gerade Linien AC, BC gezogen werden, und das Quadrat über AC um einen gegebenen Raum grösser ist, als ein Raum, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

1. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Grössern zum Kleinern ist.

Fig. 78. a.

Es seye b derjenige Raum, der zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß hat, und auf der nach B hin verlängerten Linie AB seye der Punkt D, so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem Verhältniß von b zu dem Quadrat über BC. Es ist folglich der Punkt D, nebst den geraden Linien AD, BD gegeben. Man ziehe DC, und es seye c ein Raum, der sich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehnsazes die Summe des Quadrats über AC und des Raums c gleich der

 Summe

Summe des Rechteks DAB und des Raums b. Nach der Voraussezung aber ist das Quadrat über AC gleich der Summe des Raums b, und eines gegebenen Raums, der S heissen mag; also ist die Summe der Räume b, S, c gleich der Summe des Rechteks DAB, und des Raums b; und den gemeinschaftlichen Raum b hinweg genommen, ist die Summe der Räume c, S gleich dem gegebenen Rechtek DAB. Nun ist der Raum S gegeben, mithin ist der Raum c gegeben, welcher zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat; also ist das Quadrat über DC, folglich DC selbst der Grösse nach gegeben; also berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 1sten Saz unsers Isten Buchs.

Komposition.

Es seye das gegebene Verhältniß, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC haben soll, gleich dem Verhältniß der geraden Linie P zu der geraden Linie Q, und man nehme AD zu DB gleich P zu Q. S seye der gegebene Raum, um welchen nemlich das Quadrat über AC grösser seyn soll, als b. Es muß aber der Raum S, wie man aus der Analyse sieht, kleiner seyn als das Rechtek DAB. Es seye also S gleich dem Rechtek FAB, weil nun die Summe der Rechteke FAB und AB × FD gleich ist dem Rechtek DAB; so ist AB × FD der Raum, welcher in der Analyse c hieß. Und, weil c, d. i. das Rechtek AB × FD sich zu dem Rechtek BDF verhält, wie AB zu BD; so ist das Rechtek BDF gleich dem Quadrat der zu findenden Linie DC. Man finde also zwischen BD und DF die mittlere Proportionallinie DE, und beschreibe aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE einen Kreis; so ist dessen Umfang der gesuchte Ort; d. i. wenn man an irgend einen Punkt C

dieses

dieses Orts die geraden Linien AC, BC zieht; so ist das Quadrat über AC um den gegebenen Raum S, d. i. um das Rechtek FAB grösser, als der Raum b, welcher zu dem Quadrat über BC das gegebene Verhältniß von AD zu DB hat. Denn man ziehe DC; weil nun aus dem Scheitelpunkt des Dreyeks ADC die gerade Linie CB an die Grundlinie gezogen ist, und c, oder das Rechtek AB×FD sich zu dem Quadrat über DE, oder DC, d. i. zu dem Rechtek BDF verhält, wie AB zu BD; und b sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DB; so ist nach dem lezten Fall des 10ten Lehnsazes die Summe des Quadrats über AC, und des Raums c gleich der Summe des Rechteks DAB und des Raums b, d. i. nach der Verzeichnung, gleich der Summe der Räume S, c und b. Man nehme den gemeinschaftlichen Raum c hinweg; so ist das Quadrat über AC, gleich der Summe des gegebenen Raums S, und des Raums b.

2. Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das Verhältniß des Kleinern zum Grössern ist, und das übrige wie vorhin bleibt.

Fig. 78. b.

Auf der nach A hin verlängerten Linie AB seye ein Punkt D, so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem Verhältniß des Raums b zu dem Quadrat über BC, man ziehe DC, und es seye c ein Raum, der sich zu dem Quadrat über DC verhält, wie AB zu BD. Mithin ist nach dem 3ten Lehnsaz des Anhangs die Summe der Räume c b gleich der Summe des Rechteks DAB und des Quadrats über AC; nach der Voraussezung aber ist das Quadrat über AC gleich der Summe der Räume b und S. Mithin ist die Summe der Räume c, b gleich der Summe des Rechteks DAB, und der Räume b, S. Man nehme den gemeinschaftlichen

 Raum

Raum b hinweg; so ist c gleich der Summe des gegebenen Rechteks DAB, und des gegebenen Raums S. Folglich ist der Raum c gegeben, mithin auch das Quadrat über DC, zu welchem der Raum c das gegebene Verhältniß von AB zu BD hat. Also ist DC der Grösse nach gegeben, und, weil der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Man finde, weil das gegebene Verhältniß, das Verhältniß des Kleinern zum Grössern ist, auf der nach A hin verlängerten Linie AB den Punkt D, so, daß das Verhältniß von AD zu DB gleich seye dem gegebenen Verhältniß, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC haben soll. Und es seye c gleich der Summe des Rechteks DAB und des Raums S. Man nehme das Verhältniß von c zu dem Quadrat einer geraden Linie DE gleich dem Verhältniß von AB zu BD; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE beschreibe man einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe an irgend einen Punkt C desselben die geraden Linien AC, BC, DC; so ist nach dem 3ten Lehnsaz des Anhangs die Summe von c und b gleich der Summe des Rechteks DAB und des Quadrats über AC, d. i. nach der Verzeichnung, die Summe des Rechteks DAB, und der Räume S, und b ist gleich der Summe des Rechteks DAB, und des Quadrats über AC. Mithin ist das Quadrat über AC gleich der Summe der Räume S und b, d. i. das Quadrat über AC ist um den gegebenen Raum S grösser, als der Raum b.

Dieser Saz ist einerley mit dem 4ten Saz unsers IIten Buchs. Denn weil das Quadrat über AC gleich

ist

ist der Summe des Raums b, welcher zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat, und des gegebenen Raums S; so ist der Ueberschuß des Quadrats von AC über den Raum S gleich dem Raum b; also hat der Ueberschuß des Quadrats von AC über einen gegebenen Raum S zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß, und diß ist eben die Voraussezung des 4ten Sazes unsers IIten Buchs.

Ist aber die Summe des Quadrats über AC und eines gegebenen Raums gleich einem Raum, der zu dem Quadrat über BC ein gegebenes Verhältniß hat; so hat (14. D.) umgekehrt der Ueberschuß des Quadrats von BC über einen gegebenen Raum zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß, d. i. das Quadrat über BC ist um einen gegebenen Raum grösser, als ein Raum, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat; mithin berührt der Punkt C nach diesem Saz einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

3. Saz.

Fig. 79.

Wenn aus zwey gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin zwey gerade Linien AC, BC gezogen werden, und ein Raum, der zu dem Quadrat einer dieser Linien AC ein gegebenes Verhältniß hat, gleich ist der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat der andern BC ein gegebenes Verhältniß hat, und eines gegebenen Raums S: so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seye a der Raum, welcher zu dem Quadrat über AC, und b derjenige, welcher zu dem Quadrat

über BC ein gegebenes Verhältniß hat; so kann mithin nach dem Zus. des 9ten Lehnsazes auf der Verlängerung von AB ein Punkt D, und eine gerade Linie DE gefunden werden, so, daß BD sich zu DE verhalte, wie a zu dem Quadrat über AC, und AD zu DE, wie b zu dem Quadrat über BC. Es seye diß geschehen, und man ziehe DC. c seye ein Raum, welcher sich zu dem Quadrat über AD, wie BA zu DE, und d ein Raum, der sich zu dem Quadrat über AB, wie AD zu DE, endlich e ein Raum, der sich zu dem Quadrat über DC verhält, wie BA zu DE; so sind, weil BA, AD gegeben sind, die Räume c, d gegeben. Es ist aber nach dem 10ten Lehnsaz die Summe von e und b gleich der Summe von c, d, a; und nach der Voraussezung ist a gleich der Summe von b und S; mithin ist die Summe von e und b gleich der Summe von c, d, b, S. Man nehme den gemeinschaftlichen Raum b hinweg; so ist e gleich der Summe von c, d, S; mithin ist e gegeben. Es hat aber e zu dem Quadrat über DC das gegebene Verhältniß von AB zu DE; mithin ist das Quadrat über DC, also DC selbst der Grösse nach gegeben, und, weil der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Es seye das gegebene Verhältniß, welches der Raum a zu dem Quadrat über AC haben soll, gleich dem Verhältniß, welches eine gerade Linie M zu einer andern O hat; und das Verhältniß, welches b zu dem Quadrat über BC haben soll, seye gleich dem Verhältniß der geraden Linie N zu der geraden Linie O. Ist nun das Verhältniß von M zu N das Verhältniß des Grössern zum Kleinern; so finde man nach dem 9ten

Lehns.

Lehns. auf der nach A hin verlängerten Linie AB den Punkt D und die gerade Linie DE, so, daß sich BD zu DE verhalte, wie M zu O; und AD zu DE, wie N zu O. Ist aber das Verhältniß von M zu N das Verhältniß des Kleinern zum Grössern; so seze man M statt N, A statt B, a statt b, und umgekehrt. In beyden Fällen nehme man einen Raum c zu dem Quadrat über AD in eben dem Verhältniß, welches AB zu DE, und einen Raum d zu dem Quadrat über AB in eben dem Verhältniß, welches AD zu DE hat. S seye der gegebene Raum, um welchen a grösser seyn soll als b, und man nehme den Raum e gleich der Summe der Räume c, d, S, und e verhalte sich zu dem Quadrat einer Linie DF wie AB zu DE; aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DF beschreibe man einen Kreis: so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C desselben die geraden Linien AC, BC zieht; so wird a, nemlich ein Raum, der sich zu dem Quadrat über AC verhält, wie BD zu DE, oder wie M zu O gleich seyn der Summe des Raums b, d. i. eines Raums, der sich zu dem Quadrat über BC verhält, wie AD zu DE, oder, wie N zu O, und des gegebenen Raums S. Denn man ziehe DC; weil nun aus dem Scheitelpunkt C des Dreyeks DCB die Linie CA an die Grundlinie gezogen ist, und nach der Verzeichnung $e : \begin{cases} DF^2 \\ DC^2 \end{cases} = AB : DE$, und $b : BC^2 = AD : DE$, und $c : DA^2 = AB : DE$, und $d : AB^2 = AD : DE$, und endlich $a : AC^2 = DB : DE$; so ist, nach dem 10ten Lehnsaz die Summe von e, b gleich der Summe von c, d, a. Nach der Verzeichnung aber ist e gleich der Summe von c, d, S; also ist die Summe von b, c, d, S gleich der Summe von c, d, a. Mithin ist, die beyden Räume c und d hinweg

weg genommen, a gleich der Summe von b, S. (Dieser Saz ist nichts anders, als eine Erweiterung und Verallgemeinerung des 4ten Sazes unsers IIten Buchs, wenn nemlich in demselben statt der dort genannten Quadrate überhaupt der Gattung nach gegebene Figuren verstanden werden. Noch allgemeiner kann er auf eine beliebige Anzahl Punkte so ausgedehnt werden, daß alsdann der Ueberschuß der Summe der über einigen Linien, die aus diesen Punkten an einen andern Punkt hin gezogen werden, beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren, über einen gegebenen Raum, zu der Summe der über den übrigen eben dahin gezogenen Linien beschriebenen, der Gattung nach gegebenen, Figuren ein gegebenes Verhältniß hat. Diese Bemerkung zeigt den Zusammenhang zwischen 4, II. Ap. und 5, II. Ap. Anm. des Uebers.)

4. Saz.

Fig. 80.

Wenn aus 3 gegebenen Punkten A, B, C an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen werden, und die Summe eines Raums, der zu dem Quadrat einer dieser Linien AD ein gegebenes Verhältniß hat, und eines Raums, der zu dem Quadrat einer andern BD ein gegebenes Verhältniß hat, gleich ist der Summe eines Raums, der zu dem Quadrat der dritten CD ein gegebenes Verhältniß hat, und eines gegebenen Raums S: so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seyen a, b, c Räume, die zu den Quadraten über AD, BD, CD gegebene Verhältnisse haben, man ziehe

ziehe AB, und finde auf dieser Linie nach dem 9ten Lehnsaz den Punkt E, und die gerade Linie EF, so, daß sich BE zu EF wie a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF wie b zu dem Quadrat über BD verhalte. Es seye d ein Raum, der sich zu dem Quadrat über AE verhalte, wie BE zu EF, und e ein Raum, der sich zu dem Quadrat über BE verhalte, wie AE zu EF, endlich f ein Raum, der sich zu dem Quadrat über ED verhalte, wie AB zu EF; so ist nach dem 10ten Lehnsaz die Summe von a und b gleich der Summe von d, e, f.

Es ist aber nach der Voraussezung die Summe von a und b gleich der Summe von c und S; also ist die Summe von d, e, f gleich der Summe von c, S; es sind aber die Räume d, e, S gegeben; mithin ist einer der Räume f, c um einen gegebenen Raum grösser als der andere; folglich berührt der Punkt D nach dem vorhergehenden 3ten Saz einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Komposition.

Man finde auf der geraden Linie AB den Punkt E und die gerade Linie EF, so, daß BE zu EF das gegebene Verhältniß des Raums a zu dem Quadrat über AD, und AE zu EF das gegebene Verhältniß des Raums b zu dem Quadrat über BD habe. Es seye S der gegebene Raum, um welchen die Summe von a, b grösser seyn solle, als der Raum c, d. i. als ein Raum, der zu dem Quadrat über CD ein gegebenes Verhältniß haben soll, und man mache das Verhältniß von einem Raum d zu dem Quadrat über AE gleich dem Verhältniß von BE zu EF; und das Verhältniß von einem

einem Raum e zu dem Quadrat über BE gleich dem Verhältniß von AE zu EF. Nun seye 1) die Summe von d, e grösser, als der Raum S, und der Ueberschuß jener Räume über diesen seye gleich dem Raum T. Man beschreibe nach dem vorhergehenden 3ten Saz einen Kreis, so, daß, wenn man an irgend einen Punkt D desselben aus den gegebenen Punkten C, E die geraden Linien CD, ED zieht, der Raum c, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß hat, gleich seye der Summe des Raums f, der zu dem Quadrat über ED das gegebene Verhältniß von AB zu EF hat, und des Raums T; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn, d. i. wenn man AD, BD zieht, so wird die Summe des Raums a, der sich zu dem Quadrat über AD verhält, wie BE zu EF, und des Raums b, der sich zu dem Quadrat über BD verhält, wie AE zu EF gleich seyn der Summe der Räume c, S. Denn, weil nach der Verzeichnung die Summe von d, e gleich ist der Summe von S, T; so ist die Summe von d, e, f gleich der Summe von S, T, f; es ist aber c nach der Verzeichnung gleich der Summe von f, T; mithin ist die Summe von d, e, f gleich der Summe von S, c. Es ist aber nach dem 10ten Lehnsaz die Summe von a, b gleich der Summe von d, e, f, d. i. der Summe von c, S.

2) Es seye der Raum S grösser, als die Summe der Räume d, e, und der Ueberschuß jenes Raums über diese seye gleich dem Raum V. Man beschreibe nach dem vorhergehenden Saz einen Kreis, so, daß, wenn man an irgend einen Punkt desselben D die geraden Linien ED, CD zieht, der Raum f, der sich zu dem Quadrat über ED verhält, wie AB zu EF, gleich

gleich seye der Summe des Raums c, der zu dem Quadrat über CD das gegebene Verhältniß hat, und des Raums V; so wird dessen Umfang der gesuchte Ort seyn. Denn nach der Verzeichnung ist die Summe der Räume d, e, V gleich dem Raum S; mithin ist die Summe der Räume d, e, V, c gleich der Summe der Räume c, S. Es ist aber ebenfalls nach der Verzeichnung f gleich der Summe der Räume c, V; mithin ist die Summe der Räume d, e, f, d. i. die Summe der Räume a, b gleich der Summe der Räume c, S.

Ist die Summe der Räume d, e gleich dem Raum S; so ist auch f gleich c und das Quadrat über ED, welches ein gegebenes Verhältniß zu f oder c hat, hat (9. D.) auch ein gegebenes Verhältniß zu dem Quadrat über CD. Also hat die gerade Linie ED ein gegebenes Verhältniß zu der Linie CD. Mithin berührt der Punkt D eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis nach dem 2ten Saz unsers IIten Buchs.

(Wegen dessen, was in der Anmerkung bey dem Zusaz zu dem 9ten Lehnsaz erinnert worden ist, hat der 2te, 3te und 4te Saz dieses Simsonschen Anhangs eine Einschränkung nöthig. Es würde nemlich z. B. in dem 3ten Saz der Ort kein Kreis, sondern eine der Lage nach gegebene gerade Linie seyn, wenn der Raum a, der zu dem Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß hat, gerade das nemliche Verhältniß zu diesem Quadrat hätte, welches der Raum b zu dem Quadrat über BC hat. Denn wirklich, wenn $a : AC^2 = b : BC^2$; so ist auch $a - b : AC^2 - BC^2$

$= a :$

$= a : AC^2$, d. h. in einem gegebenen Verhältniß. In eben diesem Verhältniß nehme man den gegebenen Raum S zu einem Raum T; so ist mithin T gegeben; und, weil $a - b : AC^2 - BC^2 = S : T$, und $a - b = S$; so ist $AC^2 - BC^2 = T$, mithin berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz unsers IIten Buchs. Ueberhaupt also ist der Ort eine gerade Linie, wenn die 2. Räume, auf welche am Ende die Sache zurück gebracht wird, zu den ihnen zugehörigen Quadraten einerley Verhältniß haben. Anm. des Uebers.)

Erster Anhang
des Uebersezers.

Bemerkungen
über
einige dieser Oerter.

Zu einigen der vorhergehenden Säze können noch folgende Zusäze gemacht werden: Nemlich

Zum 24sten Saz des Isten Buchs.

Fig. 81.

1. Zus. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AH, AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn HK die Summe der einen AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere AG ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist; oder wenn entweder der Ueberschuß der einen über eine gegebene Linie, oder die Summe der einen und einer gegebenen Linie zu der andern ein gegebenes Verhältniß hat: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende gerade Linie.

1ster Fall. Wenn HK die Summe der einen aus A gezogenen Linien AH, und einer dritten Linie AK, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, gegeben ist. Man verlängere AH auf die Seite von A hin, und schneide auf dieser Verlängerung die dritte Linie AK ab; so berührt der Punkt K eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 20sten Saz des Isten Buchs. Es seye diß die Linie LM. Weil nun an LM und BC die geraden Linien AK, AG, welche ein gegebenes Verhältniß haben, unter gegebenen

Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene mit BC gleichlauffende Linie nach dem 22sten Saz unsers Isten Buchs. Die Komposition ergiebt sich von selbst. Auf ähnliche Art schließt man nun auch bey den andern Fällen.

Ganz kurz könnte man diesen Zusaz auch so beweisen: Man kann sich vorstellen, die zwey der Lage nach gegebenen Parallelen, von welchen in dem 24sten Saz des Isten Buchs die Rede ist, liegen immer näher und näher bey einander, bis sie endlich ganz auf einander fallen, d. h. bis nur noch Eine gerade Linie der Lage nach gegeben ist. Und die Auflösung, die bey dem Saz gegeben ist, gilt offenbahr völlig eben so, selbst noch in dem Fall, wenn statt 2 der Lage nach gegebener Parallelen nur Eine gerade Linie gegeben ist. Bey dem 25sten Saz geht es nicht an, einen ähnlichen Zusaz zu machen, weil von den 2 Bedingungen des Sazes, daß nemlich 1) die geraden Linien an die der Lage nach gegebenen Parallelen unter gegebenen Winkeln gezogen, und 2) diese gezogenen Linien ein gegebenes Verhältniß unter einander haben sollen, weil, sage ich, von diesen 2 Bedingungen, so bald man statt 2 der Lage nach gegebener Parallelen nur Eine gerade Linie sezen wollte, die leztere schon in der erstern enthalten, folglich keine neue Bedingung wäre.

2. Zus. Auch, wenn aus einem Punkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie 2 gerade Linien, deren Summe oder Unterschied gegeben ist, unter gegebenen Winkeln gezogen werden; so berührt der Punkt eine mit jener erstern gleichlauffende der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn, wenn die Summe der gezogenen Linien gegeben ist; so ist folglich die Summe der einen, und einer dritten Linie, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat (diese dritte Linie ist nemlich in diesem Fall einerley mit der andern), gegeben. Ist

aber der Unterschied der gezogenen Linien gegeben; so hat folglich der Ueberschuß der einen über eine gegebene Linie (nemlich über den gegebenen Unterschied der gezogenen Linien) zur andern ein gegebenes Verhältniß. (Dieser Ueberschuß ist nemlich eben die andere Linie selbst.) Folglich berührt in beyden Fällen nach dem 1sten Zus. der Punkt eine der Lage nach gegebene mit der ersten der Lage nach gegebenen gleichlauffende gerade Linie.

3. Zus. Auf eben die Art, wie aus dem 1sten Zus. der 2te hergeleitet worden, läßt sich aus dem 24sten Saz selbst ein ähnlicher Zusaz herleiten. Und eben so auch aus dem 25sten Saz.

Zum 26sten Saz des Isten Buchs.

1. Zus. Wenn 2 gerade Parallellinien der Lage nach gegeben, und aus einem Punkt an eine derselben 2 gerade Linien, an die andere aber eine gerade Linie unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und wenn die Summe der beyden Rchtke, wovon das eine zwischen einer der gezogenen Linien, und einer gegebenen Linie, das andere zwischen einer andern gezogenen, und einer andern gegebenen Linie enthalten ist, gleich ist dem Rchtk, welches zwischen der dritten gezogenen und einer dritten gegebenen Linie enthalten ist; so berührt der Punkt, aus welchem die geraden Linien gezogen worden, eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Denn man kann sich vorstellen, von den im 26sten Saz genannten 3 Parallellinien fallen 2 mit einander zusammen, und, diese Veränderung abgerechnet, bleibt alles bey diesem Saz gesagte.

2. Zus. Wenn eine gerade Linie der Lage nach gegeben ist, und an dieselbe aus einem Punkt 3 gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und

das übrige bleibt wie vorhin; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie. In diesem Fall nemlich fallen alle 3 im 26sten Saz genannte Parallelen zusammen.

Aehnliche Zusäze nun lassen sich, wie man leicht sieht, auch bey dem 27sten, 28sten, 29sten Saz, wie auch bey allen dort bemerkten Zusäzen machen.

Zum 31sten Saz des Isten Buchs.

Auch dieser Saz kann allgemeiner gemacht, und auf jede beliebige Menge der Lage nach gegebener gerader Linien ausgedehnt werden, nemlich so:

Fig. 82.

Wenn eine beliebige Anzahl gerader Linien AB, CD, EF u. s. w. der Lage nach gegeben, und auf jeder derselben ein Punkt B, D, F u. s. w. gegeben ist, und an dieselbe aus einem Punkt G gerade Linien GH, GI, GK u. s. w. unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe der Rechteke, welche zwischen geraden, der Grösse nach gegebenen Linien α, β, γ u. s. w. und den Stüken HB, ID, KF u. s. w. enthalten sind, (die auf den der Lage nach gegebenen Linien zwischen den an sie gezogenen Linien, und den auf ihnen gegebenen Punkten abgeschnitten sind) gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt G eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Denn, wenn man die Rechteke GHBL, GIDM, GKFN u. s. w. ergänzt; so wird ganz, wie am Ende des 31sten Sazes gezeigt, daß diß nur ein anderer Ausdruk sey von dem 2ten Zus. des 29sten Sazes.

Zum 32sten Saz des Isten Buchs.

Zus. Wenn aus einem Punkt A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie BC zwey gerade Linien AF, AG

AG unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und das Rchtk GAF, welches sie einschliessen, gleich ist einem gegebenen Raum: so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene, mit BC gleichlauffende gerade Linie.

Weil AG, AF unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so ist das Verhältniß von AG zu AF, d. i. von dem Rchtk GAF zu dem Quadrat über AF gegeben. Nach der Voraussezung aber ist das Rchtk GAF gegeben, mithin ist auch das Quadrat von AF, folglich AF selbst der Grösse nach gegeben. Weil also aus einem Punkt F in der der Lage nach gegebenen geraden Linie BC eine der Grösse nach gegebene gerade Linie AF unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; so berührt der Punkt A eine mit BC gleichlauffende, der Lage nach gegebene, gerade Linie nach dem 20sten Saz.

Komposition.

Der gegebene Raum seye N. Man ziehe aus irgend einem Punkt F auf der Linie BC, FH von beliebiger Grösse unter dem gegebenen Winkel AFC, aus H ziehe man an BC eine andere Linie HD unter dem gegebenen Winkel AGB. Nun mache man wie HD zu HF, so N zu dem Quadrat über FA. Durch den hiedurch bestimmten Punkt A ziehe man eine mit BC gleichlauffende gerade Linie; so ist diese der gesuchte Ort. Denn man ziehe aus irgend einem Punkt A derselben an BC die Linien AF, AG unter den gegebenen Winkeln. Weil nun die Dreyeke AFG, HFD ähnlich sind; so ist $AF : AG = HF : HD = AF^2 : N$. Folglich auch $AF^2 : AF \times AG = AF^2 : N$. Also ist $N = FA \times AG$. Auch dieser Zusaz folgt kürzlich daraus, weil die im 32sten Saz genannten Parallelen hier in eine gerade Linie zusammen fallen. Eben so können nun ähnliche Zusäze zu dem 33sten und 34sten Saz des Isten Buchs, und

und zu dem Isten Saz des Simsonschen Anhangs gemacht werden, wobey noch diß zu bemerken ist, daß man auch einige der gezogenen Linien, welche man will, als in eine Linie zusammenfallend sich vorstellen kann.

Uebrigens verdient noch bemerkt zu werden, daß auch der 32ste Saz des Isten Buchs allgemeiner gemacht werden, und von jeder beliebigen Anzahl gerader der Lage nach gegebener Parallelen so ausgedrukt werden kann: Wenn an eine beliebige Anzahl gerader der Lage nach gegebener Parallelen aus einem Punkt gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, und die Summe aller Rechteke, welche je zwischen zwey der gezogenen Linien enthalten sind, oder der Ueberschuß einiger dieser Rechteke über die übrige, gleich ist einem gegebenen Raum; so berührt der Punkt, aus welchem die Linien gezogen worden sind, eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Endlich kann auch noch der 34ste Saz des Isten Buchs allgemein so ausgedrukt werden: Wenn an eine beliebige Anzahl der Lage nach gegebener Parallelen aus einem Punkt gerade Linien gezogen werden, und der Ueberschuß der über einigen derselben beschriebenen, der Gattung nach gegebenen Figuren über die über den übrigen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gegeben ist; so berührt der Punkt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Zum 3ten Saz des IIten Buchs.

Dieser Saz kann noch allgemeiner gemacht, und so ausgedrukt werden:

Fig.

Fig. 83.

Wenn aus einem gegebenen Punkt A eine gerade Linie AC, und aus deren Endpunkt an eine der Lage nach gegebene gerade Linie ED eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und wenn entweder eine der Gattung nach gegebene Figur über der zuerst gezogenen AC gleich ist dem Rchtk, das enthalten ist zwischen einer gegebenen Linie BE, und demjenigen Stük von der der Lage nach gegebenen geraden Linie ED, welches zwischen einem gegebenen Punkt E, und der zweyten gezogenen Linie CD abgeschnitten wird: oder wenn die Summe oder der Unterschied eines gegebenen Raums und einer der Gattung nach gegebenen Figur über AC gleich ist dem besagten Rchtk: oder wenn die Summe einer der Gattung nach gegebenen Figur über AC und des genannten Rchtks gegeben ist; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Ister Fall. Wenn die der Gattung nach gegebene Figur über AC ein Quadrat ist. Hier zerfällt der Saz in 4 besondere Säze. Der erste derselben ist: wenn das Quadrat über AC gleich ist dem genannten Rchtk. Diß ist nun eben der 3te Saz unsers IIten Buchs. Die 3 übrigen besondern Säze für den Isten Fall sind folgende:

1) Wenn die Summe eines gegebenen Raums, und des Quadrats über AC gleich ist dem genannten Rchtk, und das übrige bleibt, wie bey dem 3ten Saz unsers IIten Buchs.

Es seye der gegebene Raum gleich dem Rechtek BE × Ee. Weil nun BE gegeben ist; so ist Ee der Grösse nach gegeben (61. D.). Man nehme Ee auf der Linie ED von E gegen D hin. Weil nun BE × Ee kleiner ist, als BE × ED; so ist Ee < ED, folglich fällt

 der

der Punkt e zwischen E und D. Und weil der Punkt E gegeben ist; so ist auch der Punkt e gegeben. Und da nach der Voraussezung $BE \times Ee + AC^2 = BE \times ED$; so ist, das gemeinschaftliche Rchtk $BE \times Ee$ hinweg genommen, $AC^2 = BE \times eD$, folglich berührt der Punkt C nach dem 3ten Saz des IIten Buchs einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Die Komposition ergiebt sich von selbst.

2) Wenn das Quadrat über AC gleich ist der Summe eines gegebenen Raums $BE \times Ee$, und des Rchtks $BE \times ED$, und das übrige bleibt wie vorhin.

Man trägt in diesem Fall Ee auf die nach E hin verlängerte Linie DE. Ausser diesem bleibt alles dem vorhergehenden ähnlich.

3) Wenn die Summe des Quadrats über AC, und des Rechteks $BE \times ED$ gleich ist einem gegebenen Raum, und alles übrige, wie vorhin, bleibt.

Man trägt in diesem Fall Ee von E gegen D hin, und weil $BE \times Ee$ grösser ist als $BE \times ED$; so fällt e auf die über D hinaus verlängerte Linie ED. Uebrigens bleibt alles dem vorhergehenden ähnlich.

IIter Fall. Wenn die der Gattung nach gegebene Figur über AC kein Quadrat ist, und wenn 1) diese Figur gleich ist dem Rchtk $BE \times ED$.

Die Figur über AC heisse a, weil sie nun der Gattung nach gegeben ist; so ist ihr Verhältniß zu dem Quadrat über AC gegeben (53. D.). Man nehme BE zu BF in eben diesem Verhältniß, so ist folglich BF der Grösse nach gegeben. Weil nun $a : AC^2 = BE : BF = BE \times ED : BF \times ED$, und $a = BE \times ED$; so ist $AC^2 = BF \times ED$, mithin berührt der Punkt C nach dem 3ten Saz des IIten Buchs einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Hieraus folgen nun die übrigen, denen beym Isten Fall 1. 2. 3. ähnliche Zusäze völlig auf eben die Art.

Zu dem 6ten Saz des IIten Buchs

lassen sich, wie man leicht sieht, völlig ähnliche Zusäze, wie bey des 3ten Sazes Istem Fall 1. 2. 3. machen, die ich, da sie ganz auf dieselbe Art bewiesen werden, nur ohne Beweis her seze. Nemlich

1) wenn alles übrige bleibt, wie in dem 6ten Saz, und die Summe eines gegebenen Raums, und der beyden Figuren, welche der Gattung nach gegeben, und über den an einen Punkt hin gezogenen geraden Linien beschrieben sind, gleich ist dem dort genannten Rechtek;

2) wenn alles übrige bleibt, und die Summe der beyden der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe eines gegebenen Raums, und des genannten Rchtks;

3) wenn alles übrige bleibt, und die Summe des genannten Rchtks, und der beyden der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist einem gegebenen Raum;

so berührt in allen diesen Fällen der Punkt, an welchen hin die geraden Linien gezogen sind, über denen die der Gattung nach gegebenen Figuren beschrieben werden, einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Mit Hülfe des 1sten dieser Zusäze kann nun der 6te Saz noch weit allgemeiner gemacht, und auf jede beliebige Anzahl von gegebenen Punkten ausgedehnt werden, aus welchen gerade Linien an einen Punkt hin gezogen, und über denselben der Gattung nach gegebene Figuren beschrieben werden, deren Summe gleich ist dem in dem Saz genannten Rchtk.

Diß wird nemlich für jede beliebige Anzahl gegebener Punkte erwiesen seyn, wenn gezeigt wird, daß sich jede beliebige Anzahl gegebener Punkte immer auf eine um Eins geringere Anzahl gegebener Punkte zurük brin-

gen lasse. Diß leztere aber wird völlig auf eben die Art, wie bey dem 5ten Saz des IIten Buchs erwiesen. Es seyen z. B. (Fig. 84.) die 3 Punkte A, B, C gegeben, und aus denselben an einen Punkt D hin die geraden Linien AD, BD, CD gezogen, aus dem Punkt D seye an eine der Lage nach gegebene gerade Linie EF, DG mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen, und es seye die Summe von 3 der Gattung nach gegebenen Figuren über AD, BD, CD gleich dem Rchtk, das enthalten ist zwischen einer gegebenen geraden Linie α, und demjenigen Stük der Linie EF welches zwischen einem auf ihr gegebenen Punkt F, und der Linie DG abgeschnitten wird; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Die Figuren über AD, BD, CD heissen a, b, c; so sind folglich die Verhältnisse dieser Figuren zu den Quadraten über AD, BD, CD gegeben (53. D.). Man ziehe AB, und finde nach dem 9ten Lehnsaz den Punkt H und die gerade Linie HI so, daß sich BH zu HI wie a zu dem Quadrat über AD, und AH zu HI wie b zu dem Quadrat über BD verhalte; so ist nach dem Zus. des 10ten Lehns. die Summe der Figuren a, b gleich einem gegebenen Raum, und einer Figur, die zu dem Quadrat über HD ein gegebenes Verhältniß, nemlich das Verhältniß von AB zu HI hat. Diese Figur heisse h. Nun ist nach der Voraussezung die Summe der Figuren a, b, c gleich dem Rchtk $\alpha \times$ FG. Folglich ist die Summe der Figuren c, h und eines gegebenen Raums gleich eben diesem Rchtk. Weil nun die Punkte H, C, F gegeben, und DG mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichlauffend gezogen ist; so berührt der Punkt D nach dem hier beigebrachten 1sten Zus. einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Die Komposition folgt von selbst.

Völlig

Völlig eben so werden 4 gegebene Punkte auf 3; kurz immer jede beliebige Anzahl gegebener Punkte auf eine um Eins geringere Anzahl zurük gebracht. Folglich gilt der 6te Saz allgemein von jeder beliebigen Anzahl gegebener Punkte. Und eben so allgemein gelten auch die vorhin angeführten 3 Zusäze.

Ist, statt der Summe aller der Gattung nach gegebenen Figuren, der Ueberschuß von einigen derselben über die übrige gleich dem in dem 6ten Saz genannten Rchtk; so berührt der Punkt, an welchen hin die Linien aus den gegebenen Punkten gezogen werden, entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis.

Es seyen

I. nur 2 Punkte A, B gegeben, und aus denselben an einen Punkt C hin die geraden Linien AC, BC gezogen; wenn nun aus dem Punkt C an eine der Lage nach gegebene gerade Linie EN eine gerade Linie CD mit einer der Lage nach gegebenen gleichlauffend gezogen wird, und es ist

Fig. 85.

1) der Unterschied der Quadrate über AC und BC gleich dem Rchtk, das zwischen einer gegebenen geraden Linie α, und dem Stük ED enthalten ist, welches zwischen einem gegebenen Punkt E, und der Linie CD abgeschnitten wird; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

CD ist entweder senkrecht auf AB, oder nicht. Es seye a) CD nicht senkrecht auf AB; so begegnet folglich CD und jede mit ihr gleichlauffende Linie den auf AB errichteten Perpendikeln. Man theile die Linie AB in H in 2 gleiche Theile, und ziehe HL senkrecht auf AB. Durch den gegebenen Punkt E ziehe man EL mit CD gleich-

gleichlauffend; so ist folglich EL der Lage nach gegeben, und die Linien HL, EL werden einander in einem gegebenen Punkt L begegnen. Man ziehe LC, und verlängere sie, wenn es nöthig ist, bis sie dem aus B auf AB errichteten Perpendikel BM in einem Punkt M begegne, aus C fälle man noch auf AB das Perpendikel CK, und aus M ziehe man an EN die Linie MN mit CD gleichlauffend. Weil nun nach der Voraussezung der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich ist dem Rchtk $\alpha \times ED$; so ist nach dem 1sten Lehns. des IIten Buchs, das doppelte Rchtk $AB \times HK$ gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, d. h. es ist $HK : ED = \alpha : 2 AB$. Wegen der Parallelen aber ist $HK : HB = LC : LM = ED : EN$, oder verwechselt $HK : ED = HB : EN$; folglich ist $\alpha : 2 AB = HB : EN$, mithin das Verhältniß von HB zu EN gegeben. Es ist aber HB, folglich auch EN der Grösse nach gegeben, und da der Punkt E gegeben ist; so ist auch der Punkt N (30. D.), mithin die gerade Linie NM der Lage nach (31. D.) gegeben. Und, weil auch BM der Lage nach gegeben ist; so ist folglich der Punkt M (28. D.), mithin die gerade Linie LCM, welche durch die gegebenen Punkte L, M geht, der Lage nach (29. D.) gegeben, oder: der Punkt C berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie.

Komposition.

Man ziehe EL, HL, wie gesagt worden, und mache das Rchtk $\alpha \times EN$ gleich dem Quadrat über AB, d. i. gleich dem doppelten Rchtk $HB \times BA$. Aus dem Punkt E schneide man auf ED, auf welcher Seite von E man will, EN ab, durch N ziehe man NM mit EL gleichlauffend, die einem aus B (demjenigen unter den Punkten A, B, der in Bezug auf den Punkt H auf eben derselben

selben Seite liegt, auf welcher N in Bezug auf den Punkt E liegt) errichteten Perpendikel BM in M begegne. Endlich ziehe man die Linie LM; so ist diese der gesuchte Ort, d. i. wenn man an irgend einen Punkt C derselben AC, BC, und aus eben diesem Punkt an EN die Linie CD mit EL gleichlauffend zieht; so ist der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$. Denn man fälle aus C auf AB das Perpendikel CK; so ist nach dem 1sten Lehns. des IIten Buchs der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$. Diß doppelte Rchtk aber verhält sich zu dem doppelten Rchtk $AB \times HB$ wie HK zu HB, d. i. wegen der Parallelen wie ED zu EN, oder wie das Rchtk $\alpha \times ED$ zu dem Rchtk $\alpha \times EN$. Nun ist nach der Verzeichnung das Rchtk $\alpha \times EN$ gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HB$, folglich ist auch das Rchtk $\alpha \times ED$ gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$, d. i. gleich dem Unterschied der Quadrate über AC, BC.

Es seye nun b) CD senkrecht auf AB; so ist die der Lage nach gegebene Linie ED entweder einerley mit AB oder nicht. Ist ED mit AB einerley Linie (Fig. 86.); so ist folglich, wenn man wieder AB in H in 2 gleiche Theile theilt, $2\,AB \times HD = \alpha \times ED$. Es ist aber entweder die Summe der gegebenen Linie EH und der Linie ED, oder der Unterschied dieser Linien gleich der Linie HD. Mithin ist entweder die Summe des Rchtks $2\,AB \times HE$, d. i. eines gegebenen Raums, und des Rchtks $2\,AB \times ED$, oder der Unterschied dieser Rchtke gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, also der gegebene Raum $2\,AB \times HE$ entweder gleich der Summe, oder dem Unterschied der Rchtke $2\,AB \times ED$ und $\alpha \times ED$, folglich ist, weil AB und α gegeben sind, ED der Grösse nach gegeben. Weil also aus 2 gegebenen Punkten A, B an einen Punkt C hin 2 gerade Linien AC, BC gezogen sind, und der Unterschied der über denselben beschriebenen

Qua-

Quadrate gleich ist einem gegebenen Raum, nemlich dem Rchtk $\alpha \times ED$; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie nach dem 1sten Saz des IIten Buchs. Die Komposition erhellet von selbst. Ist aber ED mit AB nicht einerley Linie; so ist entweder ED mit AB gleichlauffend, oder nicht. Sind ED, AB gleichlauffend (Fig. 87.) so begegne CD der Linie AB in K, und aus E fälle man auf AB das Perpendikel Ee; so ist folglich der Punkt e gegeben, und eK = CD, mithin der Fall ganz auf den nächst vorhergehenden zurük gebracht. Ist endlich ED nicht gleichlauffend mit AB (Fig. 88.); so begegnen diese beyden der Lage nach gegebenen Linien einander in einem gegebenen Punkt I (28. D.), und wenn CD der Linie AB in dem Punkt K begegnet, und AB in H in 2 gleiche Theile getheilt ist; so ist, nach dem 1sten Lehns. des IIten Buchs der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rchtk $AB \times HK$, folglich diß doppelte Rchtk gleich dem Rchtk $\alpha \times ED$, d. i. entweder gleich der Summe eines gegebenen Raums, nemlich des Rchtks $\alpha \times IE$ und des Rchtks $\alpha \times ID$, oder gleich dem Unterschied dieser Räume. Weil nun ID zu IK ein gegebenes Verhältniß hat; so ist, wenn man β zu α in eben diesem Verhältniß nimmt, β gegeben, und der Raum $\beta \times IK$ gleich dem Raum $\alpha \times ID$. Mithin ist das doppelte Rchtk $AB \times HK$ gleich der Summe oder dem Unterschied eines gegebenen Raums $\alpha \times IE$ und des Rchtks $\beta \times IK$. Es ist aber das Rchtk $\beta \times IK$ gleich der Summe oder dem Unterschied eines gegebenen Raums, nemlich des Rchtks $\beta \times IH$, und des Rechtks $\beta \times HK$. Wenn man also die beyden gegebenen Räume, nemlich das Rchtk $\alpha \times IE$ und das Rchtk $\beta \times IH$ zusammen nimmt, oder von einander abzieht; so ist ihre Summe, oder ihr Unterschied ein gegebener Raum P. Folglich ist das Rchtk $2.AB \times HK$ gleich der Summe oder dem Unterschied des gegebenen Raums P, und des Rchtks $\beta \times HK$.

$\beta \times$HK. Weil nun AB, β gegeben sind; so ist folglich HK, mithin das doppelte Rechtek AB$\times$HK gegeben. Mithin berührt nach dem 1sten Saz des IIten Buchs der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Komposition ergiebt sich von selbst, und man sieht leicht, daß in allen Fällen, in welchen CD senkrecht auf AB ist, der Ort des Punkts C die der Lage nach gegebene Linie CD selbst seyn werde.

2. Seyen nun über AC, BC keine Quadrate, aber doch ähnliche der Gattung nach gegebene Figuren beschrieben, und das übrige bleibe, wie vorhin; so berührt auch in diesem Fall der Punkt C eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Es seye a die Figur über AC, und b die Figur über BC: weil nun nach der Voraussezung $a : AC^2 = b : BC^2$; so hat folglich auch der Unterschied der Figuren a, b zu dem Unterschied der Quadrate über AC, BC eben diß Verhältniß von a zu AC^2. Und, weil die Figuren der Gattung nach gegeben sind; so ist folglich das Verhältniß jeder derselben zu dem Quadrat der Linie, über welcher sie beschrieben sind, gegeben. Man nehme α zu β in eben diesem Verhältniß; so ist, weil α gegeben ist, auch β gegeben, und es hat der Unterschied der Figuren a, b zu dem Unterschied der Quadrate über AC, BC eben das Verhältniß, wie α zu β, d. i. wie $\alpha \times$ED zu $\beta \times$ED. Nach der Voraussezung aber ist der Unterschied der Figuren a, b gleich dem Rchtk $\alpha \times$ED, mithin ist der Unterschied der Quadrate über AC, BC gleich dem Rchtk $\beta \times$ED; folglich berührt der Punkt C nach nr. 1. eine der Lage nach gegebene gerade Linie. Die Komposition erhellet von selbst.

3. seyen die über AC, BC beschriebenen Figuren nicht ähnlich, und das übrige bleibe wie vorhin; so berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis. Diß wird auf ähnliche Art bewiesen, wie der 2te und 3te Saz des Simsonschen Anhangs. Es kommt nemlich

lich alles darauf hinaus, daß gezeigt wird, eine andere der Gattung nach gegebene Figur, die auf einer aus einem gegebenen Punkt an C hin gezogenen Linie beschrieben wird, seye gleich der Summe des oft genannten Rchtks, und eines gegebenen Raums. Damit ist also alles auf einen in diesem Anhang bewiesenen Zus. des 3ten Sazes unsers IIten Buchs zurük gebracht.

Aehnliche Zusäze 1. 2. 3. wie bey dem 3ten Saz gelten nun offenbahr auch überhaupt bey allen unter Nr. I. angeführten besondern Fällen. Und mit Voraussezung dieser Zusäze wird dann auf eben die Art, wie in dem 4ten Saz des Simsonschen Anhangs gezeigt, daß, wenn nun auch

II. drey, oder mehrere Punkte der Lage nach gegeben, und aus denselben an einen Punkt C hin gerade Linien gezogen sind, und die Summe von einigen über ihnen beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren gleich ist der Summe des oft genannten Rchtks, und der über den übrigen Linien beschriebenen der Gattung nach gegebenen Figuren, daß, sage ich, auch dieser Fall auf den Fall von 2 gegebenen Punkten könne zurük gebracht werden, und folglich der Punkt C entweder eine der Lage nach gegebene gerade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Umkreis berühre, je nachdem nemlich die 2 der Gattung nach gegebenen Figuren, auf welche am Ende alles zurük gebracht wird, ähnlich sind, oder nicht. Ich halte mich also nicht länger dabey auf, und bemerke nur noch, daß auch in diesem IIten Fall ähnliche Zusäze Statt finden, wie bey dem 3ten Saz des IIten Buchs.

Zweyter Anhang
des Uebersezers.

Sammlung
geometrischer,
mit Hülfe der vorhergehenden Oerter
aufgelößter Aufgaben.

Auflösungen geometrischer Aufgaben mit Hülfe der Oerter kommen sehr häufig vor, ohne daß man eben immer den Nahmen: „Oerter" braucht, wobey aber natürlich die Sache selbst immer dieselbe bleibt. Gleich die allererste Aufgabe in Euklids Elementen dient zum Beweis hievon. Euklid braucht wirklich zur Auflösung den 1sten Ort unsers Isten Buchs, und diß ist vielleicht der einfachste Fall, wo unsere Oerter angewendet werden können. Auch von den folgenden Aufgaben werden einige, häufig gerade eben so aufgelöst, wie sie mit Hülfe der Oerter gefunden werden, nur dient der Gebrauch der Oerter manchmahl zu einer desto kürzern Analysis.

1. Aufgabe.

Figg. 89. a. b.

Der Flächen-Innhalt eines Dreyeks ABC, eine seiner Seiten AB, und der gegenüber stehende Winkel C sind gegeben: das Dreyek zu beschreiben.

Analyse.

Weil AB die Grundlinie eines der Grösse nach gegebenen Dreyeks der Lage und Grösse nach gegeben ist; so berührt der Punkt C eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende gerade Linie (3, 1. Ap.). Weil aber auch der Winkel C gegeben ist; so berührt eben dieser Punkt einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. A.);

 folglich

folglich muß der Punkt C sowohl auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie, als auf dem der Lage nach gegebenen Umkreis, also nothwendig da liegen, wo diese beyden Oerter einander schneiden; mithin ist der Punkt C (28. D.) gegeben, folglich sind die geraden Linien AC, BC der Lage und Grösse nach gegeben.

Bestimmung.

Weil die beyden Oerter, nemlich die gerade Linie CD, und der Umkreis AEB einander begegnen sollen, so muß die Linie CD von AB nicht weiter entfernt seyn, als derjenige Punkt des Umkreises AEB, welcher am weitesten von AB entfernt ist. Man theile AB in F in 2 gleiche Theile, und ziehe durch den Mittelpunkt G des Umkreises AEB die Linie FG, die dem Umkreis in E, und der Linie CD in H begegne; so ist, wie leicht aus 15, 3. E. folgt, E derjenige Punkt des Umkreises AEB, welcher die größte Entfernung von AB hat. Ueberdiß ist FE senkrecht auf AB (3, 3. E.), folglich auch auf CD, weil nach 3, 1. A. CD mit AB gleichlauft. Mithin ist FH die Entfernung der Linie CD von AB, und es darf, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, FH nicht grösser seyn, als FE. Oder, man ziehe noch die Linien AE, BE; so ist, weil sich alle über AB beschriebene Dreyeke verhalten, wie ihre Höhen, AEB das größte Dreyek, das in den Umkreis AEB beschrieben, folglich den gegebenen Winkel haben kann. Es sind aber die gleichen Winkel EAB, EBA gleich dem Komplement des halben gegebenen Winkels. Man beschreibe also über AB ein Dreyek AEB, so, daß jeder der Winkel EAB, EBA gleich seye dem Komplement des halben gegebenen Winkels. Ist nun der gegebene Innhalt des zu verzeichnenden Dreyeks grösser, als das Dreyek AEB; so ist die Aufgabe unmöglich: ist er diesem Dreyek gleich; so ist

ist nur Ein Punkt auf dem Umkreis AEB, dem die Linie CD begegnet, nemlich eben der Punkt E selbst: ist endlich der gegebene Innhalt kleiner, als das Dreyek AEB; so giebt es auf dem Umkreis 2 Punkte C, D, in welchen ihm die Linie CD begegnet.

Komposition.

Es seye also der gegebene Innhalt des zu beschreibenden Dreyeks nicht grösser, als das Dreyek AEB; so ziehe man nach 3, 1. A. den Ort CD, d. h. man beschreibe (45, 1. E.) über AB ein Prllgrm. ABIK, das doppelt so groß seye, als der gegebene Flächen-Innhalt des Dreyeks. Ferner beschreibe man nach 2, 1. A. den Ort AEB, d. h. man beschreibe (33, 3. E.) über AB einen Kreis-Abschnitt AEB, der des gegebenen Winkels fähig seye; so begegnet folglich nach der Bestimmung IK dem Kreis-Abschnitt AEB entweder in 2 Punkten C, D, und man zieht an einen derselben, an welchen man will, die Linien AC, BC, oder IK begegnet dem Kreis nur in einem Punkt E, und man zieht AE, BE; so ist in jenem Fall das Dreyek ACB, in diesem das Dreyek AEB das verlangte Dreyek. Denn nach 3, 1. A. hat es den verlangten Flächen-Innhalt, und nach 2, 1. A. den verlangten Winkel.

Berechnung.

Man fälle aus C auf AB das Perpendikel CL, das dem Kreise wieder in M, und dem mit AB gleichlaufsend gezogenen Durchmesser in O begegne, und es seye der Flächen-Innhalt des Dreyeks $= a^2$, AB $=$ b, der gegebene Winkel $= \beta$ FL $=$ x; so ist AL $= \frac{1}{2}$ b $-$ x, BL $= \frac{1}{2}$ b $+$ x. Nun ist LO $=$ FG, d. h. nach der Berechn. bey 2, I. Ap. es ist LO $= \frac{1}{2}$ b.

ctg. β. Ferner ist $CL = \frac{2a^2}{b}$. Weil nun $OM = CO = CL \mp LO$; so ist $LM = OM \mp OL = CL \mp 2\,OL = \frac{2a^2}{b} \mp b$ ctg. β, oder, weil man die Cotangente des stumpfen Winkels als negativ ansieht, überhaupt $LM = \frac{2a^2}{b} - b$ ctg. β. Weil nun $AL \times LB = CL \times LM$ (35, 3. E.), d. h. weil $(\frac{1}{2}b - x)(\frac{1}{2}b + x) = \frac{2a^2}{b}\left(\frac{2a^2}{b} - b \text{ ctg. } \beta\right)$; so ist folglich $\frac{1}{4}b^2 - \frac{4a^4}{b^2} + 2a^2 \text{ ctg. } \beta = x^2$, oder

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\frac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.} \beta}.$$

Mithin ist

$$AL = \frac{1}{2}b \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\frac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.} \beta},$$

und

$$BL = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b + \frac{2a^2}{b}\right)\left(\frac{1}{2}b - \frac{2a^2}{b}\right) + 2a^2 \text{ctg.} \beta}.$$

Vergl. Schulzes Taschenb. IItes Heft. S. 410, und für den Fall, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, Schwabs Samml. geometr. Aufg. die seiner Uebers. der Data angehängt ist, 23ste Aufg. Schulze nimmt $BL - AL$ als die unbekannte Linie, als das x an. Diß ist aus dem obigen

$$= \sqrt{\left(b + \frac{4a^2}{b}\right)\left(b - \frac{4a^2}{b}\right) + 8a^2 \text{ ctg. } \beta}.$$ Die Art, wie diese Formel hier hergeleitet ist, wird hauptsächlich durch die Anwendung des geometrischen Lehrsazes 33, 3. E. einfacher, als die Schulzische. Kennt man

man einmahl AL, BL; so findet sich, da man auch CL kennt, in den rechtwinklichten Dreyeken ALC, BLC das übrige leicht. Die Bestimmung läßt sich ebenfalls leicht trigonometrisch ausdruken. Es darf der Innhalt des Dreyeks höchstens gleich seyn dem Dreyek AEB, d. i. $= \frac{1}{2}$ AB × FE. Nun ist FE : $\frac{1}{2}$ AB = ctg. $\frac{1}{2}\beta$: sin. tot. Mithin darf der gegebene Flächen-Innhalt nicht grösser seyn, als $\frac{1}{4}$ b^2 ctg. $\frac{1}{2}\beta$.

2. Aufgabe.

Figg. 90. a. b. c. d.

Aus einem gegebenen Punkt A an zwey der Lage nach gegebene Linien BC, BD, die einander in einem Punkt B begegnen, eine gerade Linie EAF so zu ziehen, daß die zwischen A und den Linien BC, BD abgeschnittene Stüke EA, AF ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Analyse.

Es sind auf der geraden Linie FE aus einem auf ihr gegebenen Punkt A zwey Stüke AE, AF abgeschnitten, welche ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, und der Endpunkt F eines dieser Stüke berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie BD, mithin berührt auch der Endpunkt E des andern Stüks eine der Lage nach gegebene mit BD gleichlauffende Linie HE (4, 1. A.). Der Voraussezung nach aber berührt der Punkt E auch die der Lage nach gegebene gerade Linie BC; folglich ist E der Durchschnittspunkt von HE und BC, und also gegeben (28. D.). Mithin ist die Linie EA der Lage und Grösse nach (29. D.), mithin der Punkt F, (28. D.) folglich auch AF der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben. Und, weil nach der Voraus-

 sezung

sezung BC mit BD nicht gleichlauft; so schneidet BC immer die mit BD gleichlauffende Linie HE.

Komposition.

Man verzeichne den Ort HE nach 4. 1. A., d. h. man fälle aus A auf BD das Perpendikel AG, und nehme auf demselben AH zu AG in dem gegebenen Verhältniß, welches AE zu AF haben soll, durch H ziehe man HE mit BD gleichlauffend, und HE begegne der Linie BC in E, endlich ziehe man die gerade Linie EAF; so ist diß die gesuchte Linie, d. h. es wird AE zu AF das gegebene Verhältniß von AH zu AG haben. Der Beweis erhellet von selbst.

Berechnung.

Da hiebey in Ansehung der Zeichen sehr viele Fälle vorkommen können, je nachdem der Punkt A zwischen, oder ausserhalb der Linien BC, BD, und je nachdem der Punkt H zwischen A und G, oder auf der Verlängerung von AG entweder nach A, oder nach G hin liegt, und diese Fälle im übrigen ganz auf einerley Art behandelt werden; so begnüge ich mich den Fall von Fig. 90. a. zu betrachten. Es seye also der Winkel CBD $= \varphi$, der Winkel AFB $= x$, AG $= a$, BG $= b$, das Verhältniß von AE zu AF, d. h. von AH zu AG gleich dem von n zu m, und AG begegne der Linie BC in I; so ist

$$\begin{aligned} AH : a &= n : m \\ HE : AH &= \text{ctg.}\, x : \text{sin. tot.} \\ HI : HE &= \text{sin. tot} : \text{ctg.}\, \varphi \end{aligned}$$

folglich gleichförmig $HI : a = n.\, \text{ctg.}\, x : m\, \text{ctg.}\, \varphi$, oder $HI \times m.\, \text{ctg.}\, \varphi = a.\, n.\, \text{ctg.}\, x$. Nun ist $HI = HG - IG$, und $HG : a = m - n : m$, oder

HG

$HG = \frac{a(m-n)}{m}$; $IG : b = \sin. tot : ctg. \varphi$, oder $IG = \frac{b}{ctg. \varphi}$. Mithin ist $(m-n)\, a. ctg. \varphi - b\,m = a\,n\, ctg. x$, oder $ctg. x = \frac{(m-n)}{n} ctg. \varphi - \frac{b\,m}{a\,n}$. Hieraus findet man nun in den ähnlichen Dreyeken AHE, AGF, in welchen alle Winkel, und $AG = a$, $AH = \frac{a\,n}{m}$ gegeben sind, leicht auch AE, AF. Wäre das Perpendikel AG nicht unmittelbar, sondern dafür der Winkel AKB (Fig. 90. c.), den eine durch A gezogene Linie mit BD macht, und KG die Entfernung des Durchschnittpunkts der Linien AK, BD von dem Perpendikel AG gegeben; so würde man hieraus leicht AG finden. Es ist nemlich $AG : KG = \sin. tot : ctg. AKB$, folglich, wenn $KG = c$, $AKB = p$ gesezt wird, ist $AG = \frac{c}{ctg. p}$. Diß in der vorhin gefundenen Formel für a substituirt, giebt $ctg. x = \frac{(m-n)\, ctg. \varphi}{n} - \frac{bm}{cn} . ctg. p$. Wäre nun $b = c$, d. h. gienge (Fig. 90. d.) die durch A gezogene Linie durch den Punkt B; so würde $ctg. x = \frac{(m-n)\, ctg. \varphi}{n} - \frac{m}{n} ctg. p$. In diesem lezten Fall braucht man also, um den Winkel AFB zu finden, die Linie BG noch nicht zu kennen, oder: der Punkt A muß nicht nothwendig gegeben seyn, wenn er nur auf der der Lage nach gegebenen Linie BA liegt. Aber alsdann ist auch die Grösse von AE, AF noch nicht bestimmt. Diß zeigt auch schon der Anblik der Figur. Denn man ziehe irgend eine Linie aef gleichlauffend mit AEF; so ist $ae : af = AE : AF$.

Dieser

Dieser lezte Fall kommt in Anwendung auf einen Kometen, von dem man voraus sezt, er bewege sich (eine kurze Zeit über) gleichförmig in einer geraden Linie, bey Newton Arithm. Vniv. Probl. 30. S. 126. flg. nach der Gravesand. Ausgabe vor, um aus 3 Beobachtungen desselben die Neigung seiner nach der Voraussezung geradlinichten Laufbahn gegen die Gesichtslinien zu bestimmen. Wenn nemlich das Auge in B ist, (Fig. 90. d.) und der Komet das erste mahl in F, das 2te mahl in E, das dritte mahl in A erscheint; so weiß man die Neigungen der Gesichtslinien BA, BE, BF gegen einander, oder: diese Linien können als der Lage nach gegeben angesehen werden. Ueberdiß kennt man (weil der Komet sich gleichförmig bewegt, und folglich AE, AF sich zu einander verhalten, wie die Zeit, die er brauchte von E nach A, und von F nach A zu kommen) das Verhältniß von AE zu AF. Mithin läßt sich nach der lezten Formel der Winkel AFB bestimmen. Vergl. Lamberts Beyträge Ister Th. S. 179 §. 258. Eine andere praktische Anwendung des lezten bey der Berechnung bemerkten Falls sehe man in Kästners 7ter astron. Abhandl. S. 283 flg. wo die Formel, durch welche x bestimmt wird, weit einfacher ist, weil man für die Winkel φ, p bequeme Wehrte von 90°, 45° u. dgl. wählen kann.

3. Aufgabe.

Figg. 91. a — h.

Durch einen gegebenen Punkt D an 2 der Lage nach gegebene gerade Linien BF, CE eine gerade Linie EDF so zu ziehen, daß das zwischen den Stüken DE, DF enthaltene Rechtek gleich seye einem gegebenen Raum.

Analyse.

Analyse.

Es sind auf der geraden Linie EDF aus einem auf ihr gegebenen Punkt D die Stüke DE, DF abgeschnitten, die ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt F eines dieser Stüke berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie BF; folglich berührt der Endpunkt E des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Kreis (8, 1. A.). Eben dieser Punkt berührt aber auch nach der Voraussezung die der Lage nach gegebene gerade Linie EC, mithin ist er gegeben (28. D.); folglich ist EDF der Lage und Grösse nach gegeben (29. 28. 29. D.).

Komposition und Bestimmung.

Man verzeichne den Ort 8, 1. A., d. h. man fälle aus D auf AB das Perpendikel DH, nehme auf welcher Seite von D man will (den Fall ausgenommen, wenn EC, FB gleichlauffen: denn in diesem Fall muß man den Punkt I auf der Seite von D nehmen, auf welcher CE liegt) DI auf dem Perpendikel DH oder auf seiner Verlängerung, so, daß das Rechtek HDI gleich werde dem gegebenen Raum, beschreibe über dem Durchmesser DI einen Kreis, welcher der Linie EC in den Punkten E, e begegne, ziehe durch welchen dieser Punkte man will, die gerade Linie EDF; so ist diß die gesuchte Linie, d. h. das Rchtk EDF ist gleich dem gegebenen Raum. Wenn CE nicht senkrecht ist auf BF; so begegne DH der Linie CE in O. Weil nun erfodert wird, daß der Kreis der Linie CE wenigstens in einem Punkt begegne; so darf, in dem Fall, daß FB, CE gleichlauffen, (Fig. 91. a. b.) DI nicht kleiner seyn, als DO, d. h. der gegebene Raum, nemlich das Rechtek HDI darf nicht kleiner seyn, als das Rechtek HDO.

Ist

Ist DI = DO; so berührt, wie man leicht sieht, die Linie CE den Kreis in I: ist DI > DO; so schneidet sie ihn in 2 Punkten. Sind aber FB, CE nicht gleichlauffend (Fig. 91. c — g.); so begegnen sie einander in einem Punkt A, und wenn man aus dem Mittelpunkt K des Kreises auf CE das Perpendikel GK fällt; so darf der Halbmesser DK des Kreises nie kleiner seyn als GK. Weil nun die Dreyeke GKO, HAO ähnlich sind; so ist GK : KO = AH : HO. Nun ist in dem Fall der Fig. 91. c. KO = DO — DK; folglich wird, wenn nun DK bey dem hier vorgestellten Fall die kleinste Grösse hat, die es nur immer haben kann, d. h. wenn DK = GK, die obige Proportion diese: DK : DO — DK = AH : AO, folglich DK : DO = AH : AH + AO, oder HD × DK : HD × DO = AH : AH + AO, oder, weil DI = 2 DK : HD × DI : 2 HD × DO = AH : AH + AO. Wenn also DK, folglich DI, folglich der gegebene Raum HD × DI die kleinste Grösse hat, bey welcher die Aufgabe noch möglich ist; so ist er gleich einem Raum, der sich zu dem doppelten Rechtek HDO verhält, wie AH zu AH + AO, und wenn er diesem Raum gleich ist; so berührt die Linie CE den Kreis; ist er grösser, so schneidet sie ihn in 2 Punkten; ist er kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich. Bey den übrigen Fällen ist die Bestimmung nur darinn verschieden, daß bey einigen KO nicht wie hier dem Ueberschuß von DO über DK; sondern entweder dem Ueberschuß von DK über DO, oder der Summe von DK und DO gleich ist, und hienach der 2te Theil der Proportion abgeändert wird. Diß läßt sich leicht aus der Lage, den die Punkte D, O, K gegen einander haben, beurtheilen. Ist endlich CE senkrecht auf BF (Fig. 91. h.); so darf DK nicht kleiner als GK, d. i. nicht kleiner als AH, folglich der gegebene Raum nicht kleiner, als das doppelte Rchtek DHA seyn. Ist nun die Aufgabe nach der Bestimmung

mung möglich, und die Komposition gemacht; so wird die Richtigkeit dieser Komposition so erwiesen: Nach der Bestimmung schneidet der Kreis die Linie CE in einem Punkt E, und nach 8, 1. A. ist das Rchtk FDE gleich dem Rchtk HDI, d. i. nach der Verzeichnung gleich dem gegebenen Raum. In dem Fall, wenn CE, BF einander in einem Punkt A begegnen, läßt sich die Bestimmung auch noch auf folgende Art ausdruken: Es seye der gegebene Raum so klein als immer möglich, oder CE berühre den Kreis in einem Punkt L (Fig. 91. d.), und man ziehe LDM; so ist in allen Fällen die Summe der Winkel ALM, DLK gleich der Summe der Winkel AML, LDK (jede dieser Summen nemlich gleich einem rechten Winkel). Nun ist DLK = LDK, folglich ALM = AML, und AL = AM, folglich darf der gegebene Raum nicht kleiner seyn, als das Rchtk LDM, das zwischen den Stüken LD, DM einer geraden Linie enthalten ist, die durch den Punkt D so gezogen wird, daß die Stüke, die sie von AB, AC abschneidet, gleich werden. Vergl. l'Huilier de Maximis et Minimis, Pars prior L. I. C. II. §. 57. p. 54. Man sieht leicht, daß die Linie LDM gezogen werden kann, wenn man den Winkel BAC in 2 gleiche Theile theilt, und auf die Theilungslinie aus D ein Perpendikel fällt.

Berechnung.

Man findet sehr leicht nach der Komposition DI, DK, folglich, weil DO gegeben ist, auch KO, mithin in dem Dreyek OKE, in welchem die Seiten OK, KE und der Winkel O bekannt sind, das übrige nemlich OE, und die Winkel OKE, OEK. Eben damit kennt man auch die Winkel EKD, EDK, OED, HFD, und leicht findet man HF, DF, DE.

4. Auf-

4. Aufgabe.

Figg. 92. a. b.

Drey gerade Linien AB, AI, AC schneiden einander in einem Punkt A, man solle durch einen auf einer derselben gegebenen Punkt B an die beyden andern eine gerade Linie BIC so ziehen, daß das Rechtek BIC zu dem Quadrat über AI ein gegebenes Verhältniß habe.

Analyse.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt F (den man folglich als gegeben betrachten darf) auf derjenigen geraden Linie, auf welcher nach der Voraussezung der Punkt I liegen soll, eine gerade Linie DFG mit BIC gleichlauffend, und DFG schneide die übrigen Linien AB, AC in den Punkten D, und G; so ist DF : BI $=$ AF : AI $=$ FG : IC, oder verwechselt DF : FG $=$ BI : IC, folglich $DF \times FG : FG^2 = BI \times IC : IC^2$, oder verwechselt $DF \times FG : BI \times IC = FG^2 : IC^2 = AF^2 : AI^2$, oder $DF \times FG : AF^2 = BI \times IC : AI^2$. Nun ist nach der Voraussezung das Verhältniß von $BI \times IC$ zu AI^2 gegeben; mithin ist das Verhältniß von $DF \times FG$ zu AF^2 gegeben. Nun ist AF, folglich auch AF^2, folglich auch $DF \times FG$ gegeben. Und, weil eine gerade Linie DFG gezogen ist, deren Stüke DF, FG, die aus einem auf ihr gegebenen Punkt F abgeschnitten sind, ein gegebenes Rechtek einschliessen, und der Endpunkt D eines dieser Stüke eine der Lage nach gegebene gerade Linie AB berührt; so berührt der Endpunkt G des andern Stüks einen der Lage nach gegebenen Kreis (8, 1. A.). Dieser Punkt berührt aber der Voraussezung nach auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AC, mithin ist er gegeben (28. D.), folglich ist die Linie DFG der Lage nach gegeben (29. 28. 29. D.). Und weil

weil aus dem gegebenen Punkt B die Linie BIC mit der der Lage nach gegebenen Linie DFG gleichlauffend gezogen ist, und durch die der Lage nach gegebenen Linien AI, AC abgeschnitten wird; so ist BIC der Lage (31. D.) und (28. 29. D.) der Grösse nach gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Man beschreibe den Ort 8, 1. A. so, daß das Rechtek DFG gleich seye einem Raum, der zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat, welches das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI haben soll, d. h. man fälle aus dem gegebenen Punkt F auf AB das Perpendikel FE, und nehme auf diesem, oder auf seiner Verlängerung, auf welcher Seite von F man will, die Linie FH so, daß das Rchtk EFH zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß habe. Ueber dem Durchmesser FH beschreibe man einen Kreis, und ziehe durch den Punkt G, wo dieser Kreis die Linie AC schneidet, die gerade Linie GFD, und durch den gegebenen Punkt B, die Linie BIC mit DFG gleichlauffend; so ist BIC die gesuchte Linie, d. h. es wird das Rechtek BIC zu dem Quadrat über AI das gegebene Verhältniß haben. Und, weil der Kreis der geraden Linie AC begegnen soll; so ziehe man durch F an AB, AC eine gerade Linie LFK, so, daß die Stüke AL, AK, welche sie von AB, AC abschneidet, gleich groß werden; so darf nach der Bestimmung bey der vorhergehenden Aufgabe das Rechtek EFH nicht kleiner seyn, als das Rechtek LFK oder das Rchtk EFH darf zu dem Quadrat über AF kein kleineres Verhältniß haben, als das Rchtk LFK zu eben diesem Quadrat hat. Nach der Verzeichnung aber hat das Rchtk EFH zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß, welches das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI haben soll. Mithin darf dieses gegebene Ver-

hältniß nicht kleiner seyn, als das Verhältniß des Rchtks LFK zu dem Quadrat über AF. Sind diese beyden Verhältnisse gleich; so berührt die Linie AC den Kreis: ist das gegebene Verhältniß grösser; so schneidet sie ihn in 2 Punkten. Ist also die Aufgabe der Bestimmung nach möglich, und die Komposition gemacht; so wird die Richtigkeit derselben so erwiesen. Nach der Bestimmung schneidet der Kreis die gerade Linie AC in einem Punkt G, und nach 8, 1. A. ist das Rchtk DFG gleich dem Rchtk EFH, d. h. das Rchtk DFG hat zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß, und nun wird ganz, wie bey der Analyse erwiesen, daß auch das Rchtk BIC zu dem Quadrat über AI eben dieses Verhältniß habe.

Die Auflösung dieser Aufgabe sezt Archimed in dem 8ten Saz seines Buchs von den Konoiden und Sphäroiden als bekannt voraus in dem Fall, wenn die Linie AF zwischen AC, AB liegt, und den Winkel BAC in 2 gleiche Theile theilt. Rivaltus à Flurantia und nach ihm Sturm geben in ihren Ausgaben von Archimed, eine Auflösung für diesen Fall, welche ganz auf die nemliche Art allgemein gemacht werden kann, und im Grunde mit dieser hier einerley ist. Hier nemlich beschrieb man den Kreis so, daß das Rchtk DFG zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat. Nach jener andern Auflösung solle man das Rchtk AFM so machen, daß diß zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß habe, und dann über FM den Kreis FMG so beschreiben, daß er des gegebenen Winkels BAF fähig seye. Diß ist nun im Grunde mit dem vorigen einerley. Denn, weil in den Dreyeken DFA, MFG die Winkel bey F, und auch die bey A und G gleich sind; so sind diese Dreyeke ähnlich, folglich ist AF : DF = FG : FM, oder das Rchtk DFG ist gleich dem Rchtk AFM. Mithin ist auch nach dieser Auflösung

sung der Kreis so beschrieben, daß das Rchtk DFG zu dem Quadrat über AF das gegebene Verhältniß hat. In der Anwendung, die Archimed von dieser Aufgabe macht, ist das gegebene Verhältniß immer grösser, als das Verhältniß des Rchtks LFK zu dem Quadrat über AF, folglich die Aufgabe immer möglich. Wenn aber Rivalt und Sturm beweisen wollen, daß zu der Möglichkeit der Aufgabe nothwendig erfodert werde, daß das gegebene Verhältniß grösser seye, als das eben angeführte, wenn sie nahmentlich in dem Fall der Gleichheit beyder Verhältnisse die Aufgabe für unmöglich halten; so irrten sie offenbahr, und es ist auch nicht schwer, den Grund ihres Irrthums zu finden. Diese beyden Verhältnisse dürfen wohl gleich, nur aber das erstere nicht kleiner als das leztere seyn.

Berechnung.

Diese ist zu Bestimmung der Linie DFG ganz die nemliche wie vorhin. Eben damit sind dann auch die Winkel, unter welchen die aus dem gegebenen Punkt B mit DFG gleichlauffend gezogene Linie BIC mit AB, AI, AC macht, bekannt.

5. Aufgabe.

Fig. 93.

Es sind 3 Punkte A, B, C gegeben, und man hat in einem 4ten Punkt D beobachtet, unter welchen Winkeln je zwey der gegebenen Punkte erscheinen: die Lage dieses 4ten Punkts D zu bestimmen.

Analyse und Bestimmung.

Der Punkt D liegt entweder mit 2 der gegebenen Punkte, z. B. mit den Punkten A und B auf einer geraden

den Linie, oder nicht. Er liege 1) (Figg. 93. a. b. c. d.) nicht mit 2 der gegebenen Punkte auf einer geraden Linie. Weil nun die Linien AD, BD, welche den gegebenen Winkel ADB einschliessen, durch 2 gegebene Punkte A und B gehen; so berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. Ap.). Eben so, weil die Linien BD, CD, die den gegebenen Winkel BDC einschliessen, durch 2 gegebene Punkte B, C gehen; so berührt der Punkt D wiederum einen der Lage nach gegebenen Umkreis (2, 1. Ap.). Sollte nun (Figg. 93. e. f.) dieser leztere Kreis mit dem vorhergehenden erstern einerley seyn; so müßte also der Kreis, der durch die Punkte A, B, D gienge, auch durch den Punkt C gehen, d. h. es müßte sich um das Viereck ABCD ein Kreis beschreiben lassen; oder, wenn der Punkt B und D auf verschiedenen Seiten der Linie AC liegen; so müßte die Summe der Winkel ABC, und ADC gleich seyn zwey rechten (22, 3. E.), liegen aber die Punkte B, D auf einerley Seite der Linie AC; so müßten die Winkel ABC, ADC gleich seyn (21, 3. E.). Wäre nun einer von diesen Fällen; so könnte der Punkt D noch auf jedem beliebigen Punkt des einzigen der Lage nach gegebenen Kreises liegen, und die Aufgabe bliebe also noch unbestimmt. Es seye folglich keiner dieser Fälle; so sind mithin die Kreise ABD, ACD 2 verschiedene der Lage nach gegebene Kreise, und da der Punkt D auf jedem derselben liegt; so liegt er auf ihrem Durchschnittspunkt, und ist folglich gegeben.

Die Komposition ergiebt sich von selbst.

Es liege 2) (Figg. 93. g. h.) der Punkt D mit 2 der gegebenen Punkte, z. B. mit A und B, auf einer geraden Linie. Weil nun aus dem gegebenen Punkt C an die der Lage nach gegebene gerade Linie AB eine gerade Linie CD unter einem gegebenen Winkel CDA gezogen

zogen ist; so ist (33. D.) die Lage von CD, mithin (28. D.) der Punkt D gegeben. Nur der einzige Fall ist hier ausgenommen, wenn C ebenfalls auf der geraden Linie AB läge.

Auch hier wieder ist die Komposition für sich klar.

Berechnung.

Figg. 93. a. b. c. d.

Für den 1sten Fall. Es seye E der Mittelpunkt des über AB, und F der Mittelpunkt des über BC beschriebenen Kreises, und es seye AB $=$ a, BC $=$ b, ABC $=$ B, ADB $= \alpha$, BDC $= \beta$; so ist ABE $= \pm (90^\circ - \alpha)$, FBC $= \pm (90^\circ - \beta)$, EBF $=$ ABC $\mp$ ABE $\mp$ FBC $= B + \alpha + \beta - 180^\circ$. Kürze halber heisse EBF, d. h. $B + \alpha + \beta - 180^\circ = d$. Nun ist nach der Berechnung von 2, 1. Ap. BE $= \frac{a}{2.\ \sin.\ \alpha}$, BF $= \frac{b}{2.\ \sin.\ \beta}$. Und, weil folglich in dem Dreyek BEF die 2 Seiten BE, BF nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind; so findet man jeden der übrigen Winkel, z. B. den Winkel BEF durch die Formel:

$$\text{ctg. BEF} = \frac{\text{EB}}{\text{BF. sin. EBF}} - \text{ctg. EBF}$$

d. h. $\text{ctg. BEF} = \frac{a.\ \sin.\ \beta}{b.\ \sin.\ \alpha.\ \sin.\ d} - \text{ctg. } d.$

Und eben so

$$\text{ctg. BFE} = \frac{b\ \sin.\ \alpha}{a\ \sin.\ \beta.\ \sin.\ d} - \text{ctg. } d.$$

Es ist aber, weil EF die Linie BD halbirt, BEF $=$ BAD, und BFE $=$ BCD. Da man also die Winkel BAD, BDA nebst der Seite AB in dem Dreyek ABD, und die

die Winkel BCD, BDC nebst der Seite BC in dem Dreyek BCD kennt; so ist es leicht die übrigen Seiten und Winkel zu berechnen. In dem 2ten Fall (Figg. 93. g. h.) sind in dem Dreyek BCD die Winkel bey B, D, nebst der Seite BC gegeben, woraus das übrige leicht gefunden wird. Man vergl. Schwabs Samml. 28ste Aufg. Lamb. Beiträge 1. Th. S. 73 flg. Tempelhof theils in der Analysis endlicher Grössen, S. 482 flg. theils in seiner Ausgabe von Clairauts Anfangsgr. der Algebr. S. 203 flg. an welchem lezten Ort sich im Grund dieselbe Auflösung, wie hier in der Berechnung, nur anders hergeleitet findet. Schulzes Taschenb. II. Heft S. 448. flg. und mehrere andere.

Schikard scheint diese in der praktischen Geometrie sehr nüzliche Aufgabe zuerst bey wirklichen Messungen angewandt zu haben, die er zu Berichtigung der Geographie von Wirtemberg anstellte. S. Epist. Kepler. edit. Hansch. p. 685.

6. Aufgabe.

Fig. 94.

Ein der Gattung nach gegebenes Dreyek EBC zu finden, dessen Scheitelpunkt E gegeben ist, und dessen übrige Winkelpunkte 2 der Lage nach gegebene gerade Linien AB, GD berühren.

Analyse.

Weil das Dreyek EBC der Gattung nach gegeben ist; so ist der Winkel BEC, und das Verhältniß von BE zu EC gegeben (3. Def. D.), da nun der Endpunkt C einer dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie GD berührt; so berührt auch der Endpunkt B der andern

andern eine der Lage nach gegebene gerade Linie (6, 1. A.). Nach der Voraussezung aber berührt er auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB, mithin ist er gegeben (28. D.), folglich ist EB (29. D.), folglich die Lage von EC (33. D.), also auch der Punkt C (28. D.) gegeben.

Komposition.

Man verzeichne den Ort 6, 1. A. d. h. man fälle aus E auf eine von den der Lage nach gegebenen Linien, z. B. auf DG das Perpendikel ED, über ED beschreibe man ein Dreyek EDF, das dem gegebenen Dreyek ähnlich seye, aus dem Punkt F errichte man auf EF das Perpendikel FB, dieses schneide die andere der Lage nach gegebene Linie AB in dem Punkt B, man ziehe EB, und beschreibe über dieser Linie das Dreyek EBC, das dem gegebenen Dreyek ähnlich seye; so, daß das Dreyek EBC auf eben der Seite von EB liege, nach welcher Seite von EF hin das Dreyek EFD liegt; so ist EBC das verlangte Dreyek, d. h. der Punkt C desselben berührt die der Lage nach gegebene Linie DG. Denn es ist wegen Aehnlichkeit der Dreyeke EFD, EBC, ED : EC = EF : EB, und, weil die Winkel FED, BEC gleich sind; so ist, den gemeinschaftlichen Winkel BED hinweg genommen, oder hinzu gesezt, auch der Winkel FEB gleich dem Winkel DEC, mithin sind die Dreyeke EFB, EDC ähnlich (6, 6. E.); folglich ist EDC ein rechter Winkel. Nach der Voraussezung aber ist auch der Winkel EDG ein rechter, folglich liegt der Punkt C auf der Linie DG. Läge der Punkt F auf der Linie AB; so wäre das Dreyek EFD selbst das gesuchte.

Bestimmung.

Soll die Aufgabe möglich seyn, so muß das auf EF errichtete Perpendikel FB der Linie AB wirklich in einem Punkt begegnen, d. h. wenn DG, AB einander in A schneiden; so darf DG die Linie FB nicht so schneiden, daß die innern Winkel, welche DG mit BA, FB macht, zwey rechten gleich werden. Nun macht, wie bey der Berechnung von 6, 1. gezeigt worden, FB mit DG immer einen Winkel, der gleich ist dem Winkel BEC; folglich darf entweder der Winkel BEC, oder sein Nebenwinkel nicht gleich seyn dem Winkel BAG, je nachdem nemlich das Dreyek EFD auf dieser oder der andern Seite von ED beschrieben worden. Sind AB, DG gleichlauffend; so wird das Perpendikel FB, welches die Linie DG immer unter einem Winkel schneidet, der gleich ist BEC, immer auch AB (unter eben diesem Winkel) schneiden. Zugleich sieht man leicht, daß man zwey Auflösungen erhält, je nachdem man das Dreyek EFD auf der einen oder auf der andern Seite von ED beschreibt. Ferner ist hier voraus gesezt worden, man wisse, welcher von den Winkeln des Dreyeks am Scheitelpunkt E liegen solle. Wäre diß nicht bekannt; so könnte man jeden der 3 Winkel nach Belieben an den Scheitelpunkt sezen, und würde folglich für jeden dieser Winkel zwey, mithin im Ganzen 6 verschiedene Auflösungen bekommen. Endlich, was man auch für einen Winkel an den Scheitel sezt; so bleibt noch unbestimmt, welchem der beyden übrigen man den Winkel EDF gleich machen solle. Man könnte also wieder jeden der beyden übrigen nach Belieben darzu wählen; folglich sind in allem 12 verschiedene Auflösungen möglich.

Berechnung.

Die Linie FB begegne der Linie DG in L, und eine durch B mit DG gleichlauffend gezogene Linie, begegne dem Perpendikel ED in K. Sind nun 1) AB, DG gleichlauffend, und ist a) (Fig. 94. e.) der gegebene Winkel BEC, folglich nach der Berechnung von 6, 1. A. auch der Winkel BLD ein rechter; so ist LD = BK. Man findet aber LD (nach der Berechn. von 6, 1. A.) = ED ctg. EFD = ED ctg. EBC. Und, weil auch EK bekannt ist; so hat man in dem rechtwinklichten Dreyek EBK leicht EB. Aus dieser Seite, und den bekannten Winkeln findet man in diesem und den folgenden Fällen leicht die übrigen Seiten des Dreyeks EBC, wie auch die Winkel, welche sie mit den der Lage nach gegebenen Linien AB, DG machen, welches ich also künftig nicht weiter zu erinnern brauchen werde. Ist nun b) der Winkel BEC, folglich auch der ihm gleiche BLD kein rechter; so begegnet folglich die Linie BL der Linie ED, und zwar, wenn (Fig. 94. g.) der Winkel EFD oder EBC ein rechter ist; so begegnet BL der Linie ED in dem Punkt D, oder die Punkte D und L fallen zusammen, s. die Berechn. von 6, 1. A. In diesem Fall nun wird BK in dem rechtwinklichten Dreyek BKD, in welchem KD, und alle Winkel bekannt sind (weil nemlich der BDK das Komplement von dem BLG oder BEC ist), leicht gefunden, und dann hat man wieder in dem rechtwinklichten Dreyek EBK die beyden Seiten EK, BK, und findet folglich EB. Ist der Winkel EBC kein rechter (Figg. 94. a. b.); so begegnet folglich BL der Linie ED in irgend einem andern Punkt H. (Man denke sich nemlich in den Figg. 94. a. b. BL verlängert, bis BL, ED einander in H begegnen). Nun ist nach der Berechn. von 6, 1. A. DL = ED ctg. EBC. Hieraus läßt sich DH finden durch die Formel

DH : DL = + tang. BLD : sin. tot. Folglich hat man HK, mithin leicht BK, und daan EB wie vorhin. Sind nun 2) AB, DG nicht gleichlauffend; so begegnen sie einander in einem gegebenen Punkt A. Ist nun a) wieder (Fig. 94. f.) BEC, folglich BLD ein rechter Winkel; so suche man LD, wie bisher. Weil nun auch AD bekannt ist; so ist folglich AL bekannt, und man findet $\left.\begin{matrix} DK \\ BL \end{matrix}\right\} = AL \text{ tang. } BAD$. Mithin ist EK bekannt, und, weil BK = DL; so findet man EB wie vorhin. Ist b) BEC, folglich BLD kein rechter Winkel, und begegnet (Fig. 94. h.) BL der Linie ED in dem Punkt D, d. h. ist der Winkel EFD, oder EBC ein rechter; so findet man in dem Dreyek ABD, in welchem die Seite AD nebst den anliegenden Winkeln bekannt ist, leicht AB, und dann DK durch die Formel: DK = AB sin. BAD, und hieraus in dem rechtwinklichten Dreyek BDK leicht BK, mithin EB wie vorhin. Ist endlich (Fig. 94. c. d.) der Winkel EBC kein rechter; so begegnet BL der Linie ED in irgend einem andern Punkt H, und man findet DL, AL wie bisher. Folglich kennt man in dem Dreyek ABL die Seite AL nebst den beyden anliegenden Winkeln, und findet hieraus AB, und dann KD wie vorhin. Ferner findet man in dem rechtwinklichten Dreyek LDH, in welchem LD nebst den Winkeln bekannt ist, DH, mithin hat man HK, BK, EK, und daraus EB, wie bisher. Diese Rechnung ist sehr leicht, nur, besonders in dem lezten Fall etwas weitläuffig. Kürzer, und für alle Fälle (ausser, wenn (Fig. 94. i.) AB senkrecht auf DG ist, in welchem Fall aber die bisherige Berechnungsart ganz kurz wird, weil BK = AD, und KD = AB ist) brauchbar ist folgendes Verfahren. AB begegne der Linie ED dem Punkt I (in dem Fall, wenn AB, DG gleichlauffend sind, fallen die Punkte K und I zusammen); so ist

EI

EI und der Winkel BIE bekannt. Wenn man folglich BI finden könnte; so wäre in dem Dreyek EBI leicht EB bestimmt. BI nun wird so gefunden. In dem Viereck BIDL (Figg. 94. a. b. d. e. f.) sind die Winkel BID, IDL, BLD, und die Seite ID bekannt, und LD ist nach der Berechn. von 6, 1. = ED ctg. EBC. Mithin findet man BI nach der 4ten Lambert. Formel (Beitr. zur Mathem. II. Th. S. 179.). Es ist nemlich

dort	b	ω	a	φ
hier	BI	BID	ID	recht. W.

dort	c	ψ
hier	DL = ED ctg. EBC	BLD = BEC oder dessen Nebenwinkel.

Mithin wird die dortige Formel:

$$b = \frac{a \sin. (\varphi + \psi) - c \sin. \psi}{\sin. (\varphi + \psi + \omega)},$$

$$\text{hier: } BI = \frac{ID \cos. BLD - ED \sin. BLD \text{ ctg. } EBC}{\cos. (BLD + BID)}$$

$$\text{oder } BI = \frac{ID - ED \text{ tang. } BLD \text{ ctg. } EBC}{\cos. BID - \sin. BID \text{ tang. } BLD}$$

$$= \frac{ED \text{ tg. } BLD \text{ ctg. } EBC - ID}{\sin. BID \text{ tg. } BLD - \cos. BID}.$$

In

In dem Fall, wenn AB, GD gleichlauffen; ist BID ein rechter Winkel, folglich BI = ED ctg. EBC — ID ctg. BLD. Eben diese Formel hat, wie man leicht sieht, auch noch Statt, wenn entweder (Figg. 94. g. h.) BIDL sich in ein Dreyek verwandelt, weil nemlich 2 seiner Winkelpunkte zusammenfallen, oder, wenn BIDL nimmer in dem gewöhnlichen Sinn des Worts, wohl aber in einem etwas weitern Verstand ein Vierek ist, wenn nemlich entweder einige seiner Seiten die Stelle der Diagonalen vertreten, oder wenn einer der Winkel einwärts geht. Nur muß man in diesem Fall die Zeichen, wo es nöthig ist, gehörig verändern. Wenn z. B. (Fig. 94. c.) BI nicht auf eben der Seite von ID liegt, auf welcher DL ist; so ist offenbahr, daß der Winkel BID jezt eine derjenigen entgegengesezte Lage hat, welche er haben würde, wenn BIDL im eigentlichen Sinn des Worts ein Vierek wäre. Man muß also diesen Winkel als negativ ansehen. Bey einem negativen Winkel aber hat der Cosinus eben das Zeichen, wie bey einem gleichgrossen positiven, der Sinus hingegen das entgegen gesezte. Mithin wird in diesem Fall die Formel:

$$BI = \frac{ID - ED \text{ tang. } BLD \text{ cotg. } EBC}{\text{cosin. } BID + \text{sin. } BID \text{ tang. } BLD}.$$

Eben diese Formel findet man auch, wenn man für diesen Fall besonders die Rechnung vornimmt.

7. Aufgabe.

In einem Vierek ABCD ist die Linie AB der Lage und Grösse nach, ferner die Summe der anliegenden Winkel A und B, die Lage der gegenüber liegenden Seite CD, und das Verhältniß der beyden übrigen Seiten AC,

AC, BD, welche leztere nicht unter einander gleichlauffen dürfen, gegeben: das Vierek zu finden.

Analyse.

Man verlängere AC, BD, bis sie einander in einem Punkt E begegnen, welches immer geschehen wird, weil sie nach der Voraussezung nicht gleichlauffen. Weil nun die Summe der Winkel A, B gegeben ist; so ist der Nebenwinkel dieser Summe, d. h. der Winkel AEB (32, 1. E.) gegeben. Und, weil aus 2 gegebenen Punkten A und B 2 gerade Linien AC, BD, welche einen gegebenen Winkel E einschliessen, und ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, gezogen sind, und der Endpunkt C einer dieser Linien eine der Lage nach gegebene gerade Linie CD berührt; so berührt auch der Endpunkt D der andern eine der Lage nach gegebene Linie (16, 1. A.) DQ. Eben dieser Punkt D berührt aber nach der Voraussezung auch die der Lage nach gegebene gerade Linie CD. Mithin ist er (28. D.) gegeben; folglich ist BD der Lage und Grösse nach (29. D.), mithin die Winkel DB, folglich auch der Winkel A (4. D.) und AC der Lage (32. D.) nach, folglich der Punkt C (28. D.) mithin AC, CD auch der Grösse nach (29. D.), und der Winkel C gegeben. Oder kürzer. Weil BD der Grösse nach gegeben ist; so ist auch AC der Grösse nach (2. D.), mithin auch der Lage nach (34. D.) gegeben, folglich ist auch der Punkt C (28. D.), mithin das ganze Vierek ABCD gegeben.

Komposition.

Man verzeichne den Ort QD nach 16, 1. A. d. h. man fälle aus dem Punkt A auf CD das Perpendikel AN, ziehe dann AP so, daß der Winkel NAP gleich

werde

werde dem Nebenwinkel der Summe der Winkel CAB, DBA, und daß AN zu AP das gegebene Verhältniß habe, welches AC zu BD haben soll, und zwar muß AP auf eben der Seite von AN liegen, auf welcher Seite von AB die Linie AE liegen, d. h. das Vierek verzeichnet werden soll. Durch B ziehe man BQ gleich und gleichlauffend mit AP, und errichte auf BQ das Perpendikel QD; so wird dieses die der Lage nach gegebene Linie CD in einem Punkt D schneiden. Denn nach der Berechnung von 16, 1. A. schneiden diese Linien einander immer unter einem Winkel, der gleich ist dem gegebenen Winkel PAN, und begegnen folglich einander gewiß. Man ziehe BD, und mit dieser gleich und gleichlauffend AO, und mache den Winkel OAR gleich dem gegebenen PAN; so ist folglich die Summe der Winkel RAB, OAK, d. h. der Winkel RAB, DBA gleich dem Nebenwinkel von OAR, d. h. dem Nebenwinkel von PAN, also gleich der gegebenen Summe, und AR begegnet der Linie CD in einem Punkt C, und das Vierek ABCD ist das verlangte, d. h. AC hat zu BD das gegebene Verhältniß von AN zu AP. Denn AR möchte der Linie CD begegnen oder nicht; so kann man doch immer auf AR einen Punkt C nehmen, so, daß AC zu BD das gegebene Verhältniß hat. Es seye diß geschehen, und man ziehe NC. Weil nun die Winkel PAN, OAC gleich sind; so ist, den gemeinschaftlichen Winkel OAN hinweg genommen, oder hinzu gesezt, auch der Winkel PAO gleich NAC. Und weil AC : $\left\{\begin{matrix} BD \\ AO \end{matrix}\right.$ = AN : AP, oder AC : AN = AO : AP; so sind, PO noch gezogen, die Dreyeke APO, ANC ähnlich; folglich ist der Winkel ANC gleich APO, d. i. gleich BQD folglich ein rechter, oder NC ist senkrecht auf AN. Es ist aber auch CD (nach der Verzeichn.) eine durch den Punkt N gehende auf AN senkrechte Linie, mithin liegt der

Punkt

Punkt C auf der der Lage nach gegebenen Linie CD, oder AR, CD schneiden einander in C, und es ist AC zu BD in dem gegebenen Verhältniß.

Berechnung.

Man fälle aus B auf die der Lage nach gegebene Linie CD das Perpendikel BF; so kann man nach der Berechn. von 16, 1. A. DF finden. Ist nun CD mit AB gleichlauffend; so findet man in dem rechtwinklichten Dreyek DFB aus den bekannten Seiten DF, FB, leicht BD, und die übrigen Winkel. Also sind die Nebenwinkel ABD, ADC bekannt. Ist aber CD nicht gleichlauffend mit AB; so begegnen sie einander in einem gegebenen Punkt I, und, weil FI, DF bekannt sind; so ist auch DI bekannt, und da man in dem Dreyek DIB überdiß noch BI und den Winkel bey I kennt; so findet man leicht die Seite DB nebst den anliegenden Winkeln; folglich sind wieder die Winkel DBA, CDB bekannt. In beyden Fällen nun ist, weil der Winkel DBA bekannt, und die Summe der Winkel DBA, DAB gegeben ist, auch DAB, mithin auch ACD bekannt, und, weil BD und das Verhältniß von DB zu AC bekannt ist; so kennt man auch AC, und DC kann man nun leicht auf mehrere Art aus den übrigen bekannten Stüken herleiten.

8. Aufgabe.

Fig. 96.

Ein der Gattung nach gegebenes Dreyek EBD zu finden, dessen 3 Winkelpunkte 3 der Lage nach gegebene gerade Linien AB, CD, EC berühren, welche nicht alle unter einander gleichlauffen, auch nicht alle einen gemein-

meinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so, daß eine Seite des Dreyeks ED, welche den einander schneidenden Linien CD, EC begegnet, mit einer derselben (folglich auch mit der andern) einen gegebenen Winkel mache.

Analyse.

Weil die Winkel CED, DEB gegeben sind; so ist folglich auch der Winkel CEB gegeben. Und, weil die Winkel CDB, EDB gegeben sind; so ist auch der Winkel CDB gegeben. Ueberdiß ist das Verhältniß von EB zu DB gegeben. Und, weil die geraden Linien CE, CD der Lage nach gegeben sind; so berührt der Punkt B eine der Lage nach gegebene gerade Linie (23, 1. A.). Er berührt aber auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB. Mithin ist er gegeben (28. D.), mithin sind EB, BD der Lage nach (33. D.), folglich die Punkte E und D (28. D.), mithin EB, BD, ED der Lage und Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition und Bestimmung.

Wenn man der Komposition von 23, 1. A. Schritt vor Schritt folgen wollte; so müßte man erstens die Fälle unterscheiden, in welchen BE, BD mit den Linien CD, CE gleichlauffen oder nicht (denn der Fall, daß BE, BD auf einer geraden Linie liegen, kann der Voraussezung nach hier nicht vorkommen). In dem Fall, wenn BE, BD nicht mit CD, CE gleichlauffen, müßte man alsdann auf einer der Linie CE, CD z. B. auf CE irgend einen Punkt l nehmen, und aus demselben an die andere Linie CD die Linien lm, ln so ziehen, daß lm mit der zu ziehenden Linie BE, ln mit der zu ziehenden BD gleichlauffend würde, alsdann müßte man ol so

neh-

nehmen, daß ol zu ln das gegebene Verhältniß von EB zu BD hätte, und endlich auf lm oder ihrer Verlängerung, je nachdem nemlich E, D auf den Seiten des Winkels ECD oder seines Nebenwinkels liegen solle, den Punkt p so bestimmen, daß lp zu pm das Verhältniß von ol zu lm habe, d. h. man müßte on, und mit dieser gleichlauffend lq, und endlich mit ln gleichlauffend qp ziehen, denn so würde wegen der Parallelen ln, pq, und on, lq, pm : ml = pq : ln = lp : ol, oder verwechselt pm : lp = ml : ol seyn. Durch den Punkt p müßte man alsdann die gerade Linie Cp ziehen; so würden nach dem Beweis von 23, I. A. jede 2 aus irgend einem Punkt der Linie Cp an CE, CD hin mit lp, pq gleichlauffend gezogene Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Man sieht aber leicht, daß man nur deswegen nöthig hat, die Linien lm, ol, ln zu ziehen, um durch die bestimmten Punkte o, n die gerade Linie on, und gleichlauffend mit dieser durch den Punkt l die Linie lq ziehen zu können, aus deren Endpunkten l und q die mit EB, DB gleichlauffende Linien lp, pq gezogen sind, welche hernach den Punkt p bestimmen. Weil aber ol zu ln eben das Verhältniß hat, wie EB zu BD und überdiß ol, ln mit EB, DB gleichlauffen; so ist on, folglich auch lq mit ED gleichlauffend. Da nun bey gegenwärtiger Aufgabe der Winkel, den ED, folglich auch die ihr gleichlauffende Linie lq mit Ec macht, gegeben ist; so braucht man hier, die Linien ol, ln, on nicht zu ziehen, und die Komposition wird für alle Fälle kurz diese. Aus irgend einem Punkt l der Linie CE ziehe man lq so, daß der Winkel Clq gleich seye dem gegebenen Winkel, den ED mit EC machen soll. Dieser gegebene Winkel darf nun nicht gleich seyn dem Nebenwinkel von ECD, weil ED nach der Voraussezung der Linie CD begegnen soll; folglich begegnet auch lq der Linie CD, es geschehe diß in q, und

Dd man

man beschreibe über lq ein Dreyek lpq, das dem der Gattung nach gegebenen ähnlich seye. Durch die Punkte C, p ziehe man die gerade Linie Cp, die der Linie AB in B begegne. Endlich ziehe man BE, ED, BD mit pl, lq, pq gleichlauffend; so ist BED das verlangte Dreyek. Der Beweis erhellet von selbst. Weil aber erfodert wird, daß die gerade Linie Cp der Linie AB in einem Punkt B begegne; so darf folglich AB nicht mit Cp gleichlauffen. Diß wird nun in dem Fall nie geschehen, wenn AB mit einer der Linien EC, CD gleichlauft. Ist aber AB mit keiner dieser Linien gleichlauffend; so begegne AB der Linie CD in A, und man ziehe Ar mit Cp, und As mit CD gleichlauffend, und verlängere die Linie lp, bis sie diesen Linien in r und s begegne; so sind folglich die Dreyeke lAr und lCp, ingleichen die Dreyeke rAs und pCm ähnlich, und es ist lp : lr = Cp : Ar = pm : rs, oder verwechselt lp : pm = lr : rs. Weil nun AB nicht gleichlauffend mit Cp seyn darf; so darf, wenn lp der Linie AB in t begegnet, nicht lt gleich lr seyn, oder der Punkt t nicht auf den Punkt r fallen, d. h. es darf das Verhältniß von lt zu ts nicht gleich seyn dem von lp zu pm, d. i. dem von ol zu lm. Und, wenn diß nicht ist; so ist die Aufgabe immer möglich. Begegnete aber lp der Linie AB nicht, d. h. wären diese beyden Linien gleichlauffend; so begegnet ohnehin Cp der Linie AB, weil sie der ihr gleichlauffenden lp begegnet.

Berechnung.

Durch die Formel bey 23, I. X. hat man den Winkel ECB, wird nun (Figg. 96. a. b.) EC von AB in A geschnitten; so hat man auch noch die Seite AC nebst dem Winkel bey A, hieraus findet man AB, und nun ist in dem Dreyek AEB die Seite AB nebst allen

Winkeln

Winkeln bekannt, und man findet leicht EB, und hieraus das übrige. Sind (Fig. 96. c.) EC, AB gleichlauffend; so ist nach der Voraussezung CD, AB nicht gleichlauffend, schneiden nun diese beyden Linien einander in A; so hat man den Winkel DCB aus der Berechnung von 23, I. A. und man findet AB, und dann DB auf ähnliche Art, wie vorhin AB, EB.

Einen besondern Fall dieser Aufgabe sehe man in Schwabs Samml. 15te Aufg.

9. Aufgabe.

Fig. 97.

Einen Punkt D zu finden, so, daß, wenn man aus demselben an 3 der Lage nach gegebene gerade Linien AE, BF, CF, die nicht alle unter einander gleichlauffen, auch nicht alle Einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, 3 gerade Linien DA, DB, DC unter gegebenen Winkeln zieht, die Linien DA, DB, DC ein gegebenes Verhältniß unter einander haben.

Analyse.

Da nicht alle 3 der Lage nach gegebene Linien einander gleichlauffen; so schneidet wenigstens eine die beyden andern, und zwar, wie ebenfalls voraus gesezt wird, in 2 verschiedenen Punkten. Es schneide BF die beyden andern AE, CF in den Punkten E und F. Weil nun aus dem Punkt D an die beyden der Lage nach gegebenen Linien AE, BF 2 gerade Linien DA, DB, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt D eine der Lage nach gegebene durch E gehende gerade Linie ED (23, I. A.). Eben so, weil die Linien DB,

DC, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, an die der Lage nach gegebenen Linien BF, CF unter gegebenen Winkeln gezogen sind; so berührt der Punkt D noch eine andere durch den Punkt F gehende gerade Linie (23, I. A.). Mithin ist er gegeben (28. D.).

Komposition.

AE, FC sind entweder gleichlauffend, oder nicht. Im ersten Fall verzeichne man auf welcher Seite von EF man will, im andern auf derjenigen Seite von EF, auf welcher die Linien AE, CF zusammenstossen, innerhalb der beyden innern Winkel, die Oerter EP, Fp so (23, I. A.), daß 2 Linien, die man aus irgend einem Punkt des Orts EP an AE, BF unter den gegebenen Winkeln zieht, das gegebene Verhältniß von AD, BD, und 2 Linien, die man aus irgend einem Punkt des Orts Fp an CF, BF unter den gegebenen Winkeln zieht, das gegebene Verhältniß von CD, BD haben. In beyden Fällen werden die Oerter EP, Fp einander schneiden: es geschehe diß in D; so wird D der gesuchte Punkt seyn, d. h. wenn man aus demselben DA, DB, DC unter den gegebenen Winkeln zieht; so werden diese Linien das gegebene Verhältniß unter einander haben. Denn, da die beyden Winkel, innerhalb welcher die Oerter EP, Fp liegen, zusammen genommen entweder gleich, oder kleiner sind, als zwey rechte; so sind die Winkel PEF, pFE, die innerhalb der vorigen liegen, immer kleiner, als zwey rechte. Mithin schneiden die Linien PE, pF einander in einem Punkt D. Und nach 23, I. A. hat DA zu DB, und DB zu DC die gegebenen Verhältnisse. Die Komposition entwikelter herzusezen, hielt ich für unnöthig, weil ich sonst nur die Komposition von 23, I. A. 2 mahl hätte abschreiben müssen. Unter Voraussezung ähnlicher Bestimmungen,

gen, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, könnte man die Oerter EP, Fp oder einen derselben auch innerhalb der Nebenwinkel von AEB, CFB ziehen. Man vergleiche übrigens mit dieser Verzeichnung diejenige, welche Newton aus seiner algebraischen Rechnung herleitet (26. Probl. Arithm. Vniu. p. 121. sq. Edit. Graves.), und ich denke, die geometrische Auflösung solle bey dieser Vergleichung nichts verliehren, ungeachtet Newton blos den besondern Fall betrachtet, wenn die gegebenen Winkel DAE, DBE, DCF rechte sind.

Berechnung.

Die Berechnung von 23, I. A. giebt die Winkel DEB, DFB, und EF ist gegeben; folglich findet man leicht ED, FD. Vergl. Newt. a. a. O., Castillon in seiner Ausgabe von Newt. Arithm. Vniu. und Tempelhof. Anal. endl. Gr. S. 220 flg.

10. Aufgabe.

Fig. 98.

Es ist CIE der Neigungswinkel einer Ebene CNS mit einer andern EST, die Lage der Durchschnittslinie NS dieser beyden Ebenen, in der Ebene EST eine Linie ST, welche die Linie NS in S schneidet, der Lage und Grösse nach gegeben, und in T hat man den Winkel CTE gemessen, unter welchem ein aus einem Punkt C der Ebene CNS auf die Ebene EST gefälltes Perpendikel CE erscheint, und auch noch den Winkel ETS, die Lage des Punkts E zu bestimmen.

Analyse.

Analyse.

Weil in dem Dreyek CEI die 2 Winkel bey E und I, folglich auch der dritte gegeben sind; so ist diß Dreyek der Gattung nach gegeben (43. D.), also das Verhältniß von IE zu CE gegeben (3. Def. D.). Eben so ist, weil in dem Dreyek CET die Winkel bey E, T, gegeben sind, das Verhältniß von ET zu CE gegeben. Mithin ist auch das Verhältniß von ET zu EI gegeben (9. D.). Da nun auch die Lage der Linien NS, ST, und die Winkel ETS, EIS [dieser leztere nemlich ist (6. Def. 11. E.) ein rechter] gegeben sind; so berührt der Punkt E eine der Lage nach gegebene durch den (28. D.) gegebenen Punkt S gehende gerade Linie (23, I. A.). Eben dieser Punkt E liegt aber auch auf der (32. D.) der Lage nach gegebenen geraden Linie ET, mithin ist er gegeben (28. D.).

Komposition.

Man ziehe irgend eine gerade Linie te, errichte aus e das Perpendikel ec, und ziehe tc unter dem Winkel etc gleich dem gegebenen ETC, man mache ferner den Winkel eci gleich der Ergänzung des gegebenen Winkels EIC zu einem rechten, und ziehe ci, die der Linie te in i begegne. Nun verzeichne man (23, I. A.) den Ort SP so, daß, wenn man aus irgend einem Punkt desselben an NS, ST 2 Linien unter den gegebenen Winkeln zieht, diese Linien zu einander das Verhältniß von ei, et haben. Endlich ziehe man aus T die Linie ET unter dem gegebenen Winkel ETS; so wird diese dem Ort SP in einem Punkt E begegnen, und dieser wird der verlangte Punkt seyn, d. h. wenn man aus demselben auf der Ebene ETS ein Perpendikel EC errichtet, das der Ebene CNS in C begegnet; so wird der

der Winkel CTE dem gegebenen Winkel cte gleich seyn. Denn nach 23, 1. A. ist ET : EI = et : ei. Und, weil die Dreyeke CEI, cei ähnlich sind; so ist EI : EC = ei : ec, folglich gleichförmig ET : EC = et : ec. Und weil in den Dreyeken CET, cet auch die Winkel bey e gleich sind; so sind sie einander ähnlich (6, 6. E.). Mithin ist CTE = cte. Daß aber die Linien SP, TE einander gewiß begegnen werden, erhellet von selbst. Denn nach 11, 11. E. ist es gewiß möglich aus C auf die Ebene EST ein Perpendikel CE zu fällen: dieser gewiß immer mögliche Punkt E aber liegt nach der Analyse immer auf dem Durchschnitt von SP, TE, folglich muß dieser Durchschnitt gewiß immer möglich seyn, oder: die Linien SP, TE werden gehörig verlängert einander gewiß schneiden.

Stünden beyde Ebenen senkrecht auf einander; so fielen die Punkte E, I zusammen, und der Punkt I würde geradezu durch die in dem Dreyek ITS alsdann bekannte Seite ST nebst ihren anliegenden Winkeln bestimmt.

Berechnung.

Man findet den Winkel EST durch die Berechn. bey 23, I. A. und nun kennt man in dem Dreyek EST die Seite ST nebst den beyden anliegenden Winkeln, und findet also leicht ET, ES.

Diese Aufgabe kommt vor, um aus dem geocentrischen Ort eines Kometen, seinen heliocentrischen zu finden, wenn die Länge des Knoten, und die Neigung der Bahn als bekannt angenommen werden. Alsdann bedeutet nemlich C den Kometen, S die Sonne, nach NS hin liegt der Knoten, ETS ist die Elongation des Kometen von der Sonne, CTE seine geocentrische

Breite, TSN der heliocentrische Abstand der Erde vom Knoten. S. davon Nordmark im Berlin. astronom. Jahrb. für 1789. S. 210 flq. Man wird alle dort ohne Beweis hergesezte Formeln leicht aus der Berechn. von 23, I. A. herleiten können.

11. Aufgabe.

Fig. 99.

Ueber der der Lage nach gegebenen geraden Linie BC an einen auf ihr gegebenen Punkt B ein der Gattung nach gegebenes Dreyek ABC anzulegen, bey welchem die Summe, oder der Unterschied, oder das Rechtek der beyden übrigen Seiten AB, AC gegeben ist.

Diese leichte Aufgabe, deren Auflösung in dem Fall, wenn Summe oder Unterschied der Linien AB, AC gegeben ist auf dem 2ten Zus. von 24, I. Ap. in dem 1sten Anh. des Ueb. in dem andern Fall auf dem ebendaselbst vorkommenden Zus. zu 32, I. A. beruht, bedarf keine weitere Ausführung.

12. Aufgabe.

Fig. 100.

In dem Vierek ABDC ist BD der Lage und Grösse nach, CD der Lage nach, ferner noch die Winkel bey B und C und die Summe der Seiten AB, AC gegeben, das Vierek zu finden.

Analyse.

Weil aus einem Punkt A an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien BD, CD 2 gerade Linien AB, AC, deren Summe gegeben ist, unter gegebenen Winkeln

keln gezogen sind; so berührt der Punkt A eine der Lage nach gegebene gerade Linie (2. Zus. zu 29, I. A. am Ende). Und, weil die Linie AB aus einem gegebenen Punkt B der der Lage nach gegebenen Linie BD unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; so ist auch AB der Lage nach gegeben (32. D.) oder: der Punkt A berührt auch die der Lage nach gegebene gerade Linie AB, mithin ist er gegeben, (28. D.) folglich ist AB der Grösse nach (29. D.), AC der Lage nach (33. D.), mithin der Punkt C (28. D.), folglich AC, CD auch der Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition.

Man wende, da die Summe von 2 Linien gegeben ist, den 2ten Zus. von 29, I. Ap. auf den 25sten Saz des Isten Buchs an, und verzeichne den Ort für denselben, d. h. man ziehe aus irgend einem Punkt t der geraden Linie BD eine Linie tl unter dem gegebenen Winkel, den AB mit BD machen soll, und nehme tl gleich der gegebenen Summe von AB, AC; durch l ziehe man eine Linie lF mit BD gleichlauffend, die der verlängerten Linie CD in F begegne, ferner begegne die Linie tl, wenn es nöthig ist verlängert, eben dieser verlängerten Linie CD in m (den leichten Fall, wenn tl mit CD gleichlauft, werde ich hier Kürze halber nicht besonders betrachten, da er bey 23, I. A. ausführlich genug vorkommt), und man ziehe aus l an CD die Linie ln unter dem gegebenen Winkel, den AC mit CD machen soll, nehme dann ol = ln, und ziehe on, und mit on gleichlauffend die Linie lq, die der Linie CD in q begegne, durch q ziehe man qp mit ln gleichlauffend, und qp begegne der Linie tl in p, man ziehe Fp, und durch B gleichlauffend mit tl die Linie BA, die der Linie Fp in A begegne, endlich AC gleichlauffend mit pq, und AC be-

gegne der Linie CD in C; so ist das auf diese Art beschriebene Viereck ABCD, d. h. die Summe der Linien AB, AC ist gleich der gegebenen Linie tl. Der Beweis erhellet von selbst aus 25, I. A.

Berechnung.

Fp begegne der Linie BD in s; so hat man durch die Berechnung von 25, I. A. in dem △ DFS, DF, und den Winkel DFs, der Winkel BDC aber ist vorhin bekannt, folglich findet man leicht Ds, mithin, weil DB bekannt ist, auch Bs, und da man auch die beyden anliegenden Winkel sBA; BsA kennt; so hat man in dem Dreyeck BsA leicht AB, und hieraus das übrige.

Statt der Seite BD könnte auch die Diagonale AD, oder auch der Winkel, den diese Diagonale mit einer der 4 Seiten des Viereks machte, und statt der Summe der Seiten AB, AC auch ihr Unterschied gegeben seyn, und die Aufgabe würde immer noch auf ähnliche Art aufgelößt.

13. Aufgabe.

Fig. 101.

Es sind 4 Linien AB, BC, CD, DA gegeben aus denselben ein Viereck zu verzeichnen, um das sich ein Kreis beschreiben lasse.

Analyse.

Es seye ABCD das verlangte Viereck. Die Lage einer seiner Seiten kann man nun immer nach Belieben annehmen, folglich als gegeben betrachten. Es seye also z. B. CD der Lage und Grösse nach gegeben; man ziehe

ziehe AC und dann AE so, daß der Winkel DAE gleich werde dem Winkel BAC; weil nun (22, 3. E.) der Winkel ABC gleich ist dem Winkel ADE; so sind die Dreyeke ABC, ADE ähnlich (4, 6. E.). Also ist AB : BC = AD : DE. Nun sind AB, BC, AD gegeben, folglich (2. D.) auch DE; also ist der Punkt E gegeben (30. D.). Ueberdiß ist AB : AC = AD : AE, und verwechselt AB : AD = AC : AE. Und, weil AB, AD selbst, folglich auch ihr Verhältniß gegeben ist; so ist das Verhältniß von AC zu AE gegeben. Also sind aus 2 gegebenen Punkten C, E 2 gerade Linien AC, AE, die ein gegebenes Verhältniß haben, an einen Punkt A hin gezogen, folglich berührt der Punkt A einen der Lage nach gegebenen Umkreis, oder eine der Lage nach gegebene gerade Linie (2, II. Ap.). Weil überdiß die Grösse von DA und der Punkt D gegeben ist; so berührt der Punkt A noch einen andern der Lage nach gegebenen Umkreis (1, I. A.), folglich ist er gegeben (28. D.). Und, weil die Grösse der Linie BA und der Punkt A gegeben ist; so berührt der Punkt B einen der Lage nach gegebenen Kreis (1, I. A.). Eben dieser Punkt B berührt aber auch noch einen andern der Lage nach gegebenen Kreis, weil die Grösse von CB und der Punkt C gegeben ist (1, I. A.). Mithin ist auch der Punkt B gegeben (28. D.), und alle Seiten des Viereks sind der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.).

Bestimmung.

Es muß immer BC + AC > AB, oder AC > AB — BC, und eben so CD + AD > AC, also noch vielmehr CD + AD > AB — BC oder CD + AD + BC > AB seyn, und eben so bey den übrigen Seiten. Oder kurz: es muß immer die Summe von 3 der gegebenen Seiten des Viereks grösser seyn als die vierte.

Kompo-

Komposition.

Es seye also die Summe von je 3 der gegebenen Linien immer grösser, als die 4te, und man nehme auf der Verlängerung einer der geraden Linien CD das Stük DE gleich der vierten Proportionallinie zu AB, BC, AD. Nach 2, II. A. beschreibe man einen Ort FA so, daß, wenn man aus C, E an irgend einen Punkt desselben A die geraden Linien CA, EA zieht, CA sich zu EA verhalte wie AB zu AD, d. h. wenn AB = AD (Fig. 101. a.); so errichte man auf der Mitte von CE, FA senkrecht auf CE. Ist aber (Figg. 101. b. c.) AB nicht gleich AD; so ziehe man aus C irgend eine gerade Linie CK, nehme auf derselben CI = AB, und IH = IK = AD, ziehe die Linie KE, und mit dieser gleichlauffend die Linie IF, die der geraden Linie CD in F begegne, ferner HF, und mit dieser gleichlauffend IG, die der verlängerten Linie CD in G begegne. Endlich beschreibe man aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GF einen Kreis FA. In beyden Fällen beschreibe man weiter mit dem Halbmesser DA aus dem Mittelpunkt D einen Kreis; so wird dieser dem vorhin beschriebenen Kreis oder der vorhin beschriebenen geraden Linie FA in einem Punkt A begegnen, und wenn man über der Grundlinie AC ein Dreyek beschreibt, dessen andere Seiten die beyden noch übrigen gegebenen Seiten AB, CB des zu beschreibenden Vierek sind; so wird das Vierek ABCD das verlangte seyn, d. h. es wird sich ein Kreis darum beschreiben lassen.

Hiebey muß zuerst erwiesen werden, daß der aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DA beschriebene Kreis dem Ort FA immer begegnen werde, es mag nun FA eine gerade Linie oder ein Kreis seyn. Es seye 1) (Fig. 101. a.) FA eine gerade Linie; so ist in diesem Fall AB = AD, mithin BC = DE, folglich EF

$EF = \frac{CD + BC}{2}$, mithin $FD = [FE - ED$ oder $= ED - FE$ (je nachdem ED, d. h. BC kleiner oder grösser ist, als CD), d. h. $=] \pm \left(\frac{CD - BC}{2}\right)$. Mithin ist $FD : DA = \pm \frac{CD - BC}{2} : DA = \pm (CD - BC) : 2\,DA = \pm (CD - BC) : AB + AD$. Es ist aber nach der Bestimmung immer $AB + AD + CD > BC$ und auch $AB + AD + BC > CD$, also, $AB + AD > \pm (CD - BC)$; folglich ist auch $DA > FD$, oder der Punkt F liegt innerhalb des aus D mit dem Halbmesser AD beschriebenen Kreises, mithin begegnet die gerade Linie FA gehörig verlängert gewiß immer diesem Kreise. Es seye 2) (Fig. 101. b. c.) FA ein Kreis; so liegt F entweder zwischen C und D, oder zwischen D und E, oder auf D. Es liege F zwischen C, D; so ist $EF : CF = IK : CI = AD : AB = ED : BC$, d. h. $ED + DF : ED = CF : BC$, d. h. $DF : ED = CF - BC : BC$, d. h. $DF : CF - BC = ED : BC$, d. h. $DF : \left\{\begin{matrix} DF + CF - BC \\ CD - BC \end{matrix}\right\} = ED : ED + BC = AD : AD + AB$ oder $DF : AD = CD - BC : AD + AB$. Nun ist immer $AD + AB + BC > CD$, oder $AD + AB > CD - BC$; folglich ist immer $DF < AD$, d. h. der Punkt F liegt innerhalb des mit dem Halbmesser AD aus dem Mittelpunkt D beschriebenen Kreises. Auf ähnliche Art wird nun eben dieses auch für den Fall erwiesen, wenn F zwischen D, E liegt, und in dem Fall, wenn F auf D, d. h. auf dem Mittelpunkt des Kreises liegt, erhellet es von selbsten, daß F innerhalb des Kreises liege. Da folglich in allen Fällen F innerhalb des aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DA beschriebenen Kreises liegt; so darf jezt nur noch erwiesen werden,

werden, daß ein anderer Punkt des Kreises FA ausserhalb des aus D beschriebenen Kreises liege, oder daß $DG + FG > DA$ seye. Nach der 1sten Simsonschen Verzeichnung von 2, II. A., mit welcher, wie dort gezeigt wird, die hier gewählte 2te Simsonsche im Grund einerley ist, liegt der Punkt G (der Mittelpunkt des Orts FA) immer auf der Verlängerung von CE entweder nach E oder nach C hin, je nachdem nemlich AC oder AE, d. h. AB oder AD grösser ist, nie aber fällt er zwischen C und E. Er liege 1) (Fig. 101. b.) auf der nach E hin verlängerten Linie CE, und der Punkt F liege, wie wir auch oben zuerst angenommen haben, zwischen C und D; so ist, wie oben gezeigt worden, $DF : CF - BC = ED : BC = AD : AB$. Nach der Verzeichnung aber ist auch $FG : CG = HI : CI = AD : AB$, folglich $FG : CF + FG = DF : CF - BC$, d. h. es ist $FG : CF = DF : CF - (BC + DF)$, oder $FG : DF = CF : CF - (BC + DF)$ oder $FG : \left\{\begin{matrix} FG - DF \\ DG \end{matrix}\right. = CF : BC + DF$, oder es ist $FG : FG + DG = CF : CF + BC + DF$ oder $FG : CF = FG + DG : CD + BC$. Nach der Verzeichnung aber ist auch $FG : CF = HI : CH = AD : AB - AD$. Mithin ist endlich $AD : AB - AD = FG + DG : CD + BC$, oder $AD : FG = DG = AB - AD : CD + BC$. Nun ist immer $AB < AD + CD + BC$, folglich $AB - AD < CD + BB$, mithin ist $AD < FG + DG$, d. h. der Punkt in welchem die Linie FG dem aus G mit dem Halbmesser FG beschriebenen Kreis FA wieder begegnet, liegt ausserhalb des Kreises, der aus D mit dem Halbmesser DA beschrieben wird. Und, da der Punkt F des Kreises FA innerhalb des aus D beschriebenen Kreises liegt; so schneiden diese beyden Kreise einander gewiß. Liegt aber 2) der Punkt G (Fig. 101. c.) auf der nach C hin verlängerten Linie

EC,

EC, und wieder F zwischen C und D; so ist, wie vorhin FG : CG = DF : CF − BC, d. h. FG : FG − CF = DF : CF − BC, oder FG : CF = DF : DF + BC − CF, oder FG : DF = CF : DF + BC − CF, oder

$$FG : \begin{cases} FG + DF \\ DG \end{cases} = CF : DF + BC,$$

oder FG : FG + DG = CF : CF + DF + BC, oder FG : CF = FG + DG : CD + BC. Nach der Verzeichnung aber ist FG : CF = HI : CH = AD : AD − AB. Mithin ist AD : AD − AB = FG + DG : CD + BC, oder AD : FD + DG = AD − AB : CD + BC, und es wird, wie vorhin gezeigt, daß AD < FD + DG seye. Auf ähnliche Art wird nun eben diß erwiesen, wenn der Punkt F zwischen D und E liegt. Mithin schneiden die aus den Mittelpunkten D, G auf die vorhin angezeigte Art beschriebene Kreise einander in allen Fällen. Und nun ist nur noch zu beweisen, daß das Vierek, welches man beschreibt, wie oben gezeigt worden, wirklich die verlangte Eigenschaft habe, daß sich nemlich ein Kreis um dasselbe beschreiben lasse. Diß läßt sich nun leicht erweisen. Nach der Verzeichnung nemlich ist AC : AE = AB : AD, oder AC : AB = AE : AD, und auch AB : BC = AD : DE. Weil also in den beyden Dreyeken ADE, ABC alle Seiten proportional sind; so sind diese Dreyeke gleichwinklicht (5. 6. E.), mithin ist der Winkel ADE gleich dem Winkel ABC, folglich geht der durch die Punkte A, C, D beschriebene Kreis auch durch B (2 Schol. 5, 4. E. in der Bärm. Ausg.).

Berechnung.

Für den 1sten Fall, wenn AB = AD ist, findet man die Berechnung sehr leicht, man kann sie auch aus der folgenden herleiten, indem man b = c sezt. Es

seye

setze nemlich CD = a, DA = b, AB = c, BC = d; so ist für den 2ten Fall, wenn nemlich DA, BA ungleich sind (Fig. 101. b.), nach der Berechnung von 2, II. Ap.

$$AG = \frac{(CD+DE)\ AB.\ AD}{(BA+AD)(BA-AD)} = \frac{\left(CD+\frac{AD.BC}{AB}\right)AB.AD}{(BA+AD)(BA-AD)}$$

d. h. $AG = \frac{(ac+bd)\ b}{(c+b)\ (c-b)}$,

ferner $DG = CG - CD = \frac{(CD+DE)\ AB^2}{AB^2 - AD^2} - CD$

d. h. $DG = \frac{DE.\ AB^2 + CD.\ AD^2}{(AB+AD)(AB-AD)}$

$$= \frac{AD.\ BC.\ AB + CD.\ AD^2}{(AB+AD)(AB-AD)}$$

oder $DG = \frac{(cd+ab)\ b}{(c+b)\ (c-b)}$. Endlich ist

$AD = b = \frac{b\ (c^2 - b^2)}{(c+b)(c-b)}$.

Man kennt also in dem Dreyek ADG alle Seiten, und findet daraus leicht ADG, mithin auch ADC.

Es ist nemlich sin. ADC = sin. ADG

$$= \sqrt{[(ac+bd+ab+cd+c^2-b^2)(ac+bd+c^2-b^2-ab-cd)(ac+bd+ab+cd+b^2-c^2)(ab+cd+c^2-b^2-ac-bd)]} : 2\,(ab+cd)\,(c^2-b^2).$$

Nun ist $ac+bd+ab+cd = (c+b)(a+d)$

und $ac+bd-ab-cd = (c-b)(a-d)$

und $ab+cd-ac-bd = (c-b)(d-a)$

Mithin

Mithin ist sin. ADC

$$= \sqrt{[(c+b)(a+d+c-b)(c-b)(a-d+c+b)(c+b)(a+d+b-c)(c-b)(d-a+c+b)]} : 2(ab+cd)(c^2-b^2)$$

d. h. sin. ADC

$$= \sqrt{[(a+c+d-b)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(b+c+d-a)]} : 2(ab+cd).$$

Hieraus findet man alles übrige leicht, z. B. den Innhalt des Viereks so: Er ist gleich der Summe der Dreyeke ACD und ACB. Es ist aber der Innhalt des Dreyeks ACB $= \frac{cd. \sin. ABC}{2}$, und der Innhalt des Dreyeks ACD $= \frac{ab. \sin. ADC}{2}$. Nun ist sin. ADC $=$ sin. ABC, mithin der Innhalt des Viereks

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+c+d-b)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(b+c+d-a)}.$$

Daß das endliche Resultat der Rechnung sich nicht ändere, wenn G auf der nach C hin verlängerten Linie CD liegt, sieht man leicht.

Anmerkung.

Die Analyse dieser Aufgabe ist von Klingenstierna. Man sehe Schwed. Abhandl. V. Band, S. 203 flg. nach der deutschen Uebersezung. Auch hat nach Schwenters Erzählung in seiner Geometr. pract. nou. 1ster Tract. 4tes Buch, S. 164 flg. der Ausg. von 1618 von dieser Aufgabe der fürtreffliche Mathematicus M. Iohann. Praetorius seliger ein sonderlich Büchlein geschrieben, dessen sich nach ihm seiner ungemeldt etliche

beholfen, daraus auch Schwenter an dem angef. Ort diese Aufgabe genommen.

L'Huilier beweist in seinem oben angeführten Werk de Maximis et Minimis, P. I. C. I. §. 11. p. 5. vergl. p. 18 flg. geometrisch, daß ein auf diese Art beschriebenes Vierek das gröste unter allen seye, welche aus diesen vier gegebenen Seiten verzeichnet werden können. Zugleich bemerkt er S. 23 flg., daß, wenn man nicht auf die Bedingung des möglich grösten Innhalts, sondern bloß darauf sehen wolle, daß sich ein Kreis um das aus den vier gegebenen Seiten verzeichnete Vierek beschreiben lasse, und wenn man zugleich das Wort Vierek in dem allerweitesten Sinn nehme, wo man nemlich jede durch 4 gerade Linien begränzte Figur darunter verstehe, selbst, wenn einige der Linien statt Seiten des Viereks zu seyn, nun die Stelle der Diagonalen vertreten, daß dann aus den 4 gegebenen Seiten sich noch ein anderes Vierek verzeichnen lasse, um welches man ebenfalls einen Kreis beschreiben könne. Wir dürfen uns nemlich nur wirklich ein Vierek dieser Art gezeichnet denken, wie in Fig. 101. d. Zieht man hier wieder, wie vorhin AC; so ist jezt nimmer wie vorhin ADC gleich dem Nebenwinkel von ABC; sondern ADC selbst ist jezt gleich ABC. Wollen wir also wieder, wie vorhin ein Dreyek ADE so verzeichnen, daß es dem Dreyek ABC ähnlich werde; so müssen wir jezt DE nimmer auf der nach D hin verlängerten Linie CD, sondern von D gegen C hin abschneiden. Es geschehe diß; so wird man nun übrigens ganz auf ähnliche Art wie vorhin verfahren können.

Wegen der Berechnung für diesen Fall ist zu bemerken, daß alle übrige Linien ihre vorige Lage behalten, nur die Seite BA, die vorhin auf eben der Seite von DA lag, auf welcher CD ist, liegt jezt auf der entgegen-

gegen gesezten Seite, mithin muß in der Berechnung jezt nur immer das Zeichen von BA oder c verwechselt werden.

14. Aufgabe.

Fig. 102.

In der dreyekichten Pyramide ABCD sind die Linien BC, BD, CD der Lage und Grösse nach, und noch überdiß die Winkel ABE, ADE, ACE gegeben, den Punkt E der Grundfläche BCD zu finden, auf welchen das aus A gefällte Perpendikel trift.

Analyse.

In dem Dreyek ABE sind alle Winkel gegeben, mithin ist das Verhältniß von BE zu AE gegeben (43. D.). Eben so, weil in dem Dreyek ACE alle Winkel gegeben sind; so ist auch das Verhältniß von CE zu AE gegeben; folglich ist auch das Verhältniß von BE zu CE gegeben (9. D.). Nun sind auch die Punkte B und C gegeben; folglich berührt der Punkt E einen der Lage nach gegebenen Kreis (2, II. A.). Ferner, weil in dem Dreyek ADE alle Winkel gegeben sind; so ist das Verhältniß von DE zu AE, mithin auch das Verhältniß von DE zu EC gegeben, und, weil die Punkte C, D gegeben sind; so berührt der Punkt E noch einen andern der Lage nach gegebenen Kreis (2, II. A.), folglich ist er gegeben (28. D.).

Wären die beyden Winkel ABE, ACE, mithin auch die Linien BE, CE gleich; so würde der erste Ort des Punkts E eine gerade Linie: wären die beyden Winkel ACE, ADE gleich; so würde der andere Ort eine

 gerade

gerade Linie: wären endlich alle 3 Winkel, mithin alle 3 Linien BE, CE, DE gleich; so würden beyde Oerter gerade Linien seyn (1. Fall 2, II. A.).

Komposition.

Man nehme irgend eine gerade Linie eb, errichte aus einem Punkt b derselben das Perpendikel be, und mache die Winkel eab, eac, ead gleich den Winkeln EAB, EAC, EAD, d. h. gleich den Komplementen der Winkel ABE, ACE, ADE, und ziehe ab, ac, ad; so sind folglich die Dreyeke aeb, aec, aed den Dreyeken AEB, AEC, AED ähnlich, mithin ist

be : ae = BE : AE
ae : ce = AE : CE

folglich gleichförmig be : ce = BE : CE, und eben so ce : de = CE : DE, d. i. die Linien eb, ec, ed haben die Verhältnisse unter einander, welche EB, EC, ED haben sollen. Man beschreibe also einen Ort EF (2, II. Ap.) so, daß die aus B, C an irgend einen Punkt E desselben gezogene gerade Linien BE, CE sich zu einander verhalten wie be zu ce, d. h. man theile BC in dem Punkt F so, daß BF zu CF das gegebene Verhältniß von be zu ce habe, und nehme auf der nach C hin verlängerten Linie BC einen Punkt H so, daß BH zu HF das Verhältniß von BF zu CF, d. i. von be zu ce habe, und beschreibe aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HF einen Kreis. Eben so beschreibe man auf ähnliche Art den Ort EG, d. h. man nehme auf CD den Punkt G so, daß CG zu GD sich verhalte wie ce zu de, und auf der nach D hin verlängerten Linie CD nehme man den Punkt I so, daß CI zu IF das Verhältniß von CG zu DG, d. i. von ce zu de habe, und beschreibe aus dem Mittelpunkt I mit

dem

dem Halbmesser IG einen Kreis; so werden diese beyden Kreise einander schneiden, und ihr Durchschnittspunkt E wird der gesuchte Punkt seyn, d. h. wenn man aus demselben auf der Ebene BCD ein Perpendikel EA errichtet, und in der Ebene EBA an dasselbe aus B unter einem Winkel EBA = eba eine Linie BA zieht, die diesem Perpendikel in A begegnet; so werden die Linien CA, DA, wenn man diese nun ebenfalls zieht, mit CE, DE Winkel ACE, ADE machen, welche gleich sind den gegebenen ace, ade.

Daß die beyden Kreise FE, GE einander immer schneiden werden, erhellet schon aus folgender Betrachtung. Weil in jeder Pyramide ein Perpendikel AE auf die Grundfläche gefällt werden kann (11, 11. E.), oder, weil es auf der Grundfläche einer jeden Pyramide immer einen Punkt E giebt, auf welchen ein aus der Spize der Pyramide gefälltes Perpendikel trift, und weil dieser gewiß immer vorhandene Punkt E nach der Analyse auf den beyden beschriebenen Oertern liegt, und diese Oerter gewiß nicht einerley sind, indem es Kreise sind, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Linien liegen; so müssen folglich diese beyden Oerter einander immer wenigstens in Einem Punkt E begegnen. Und diß ist zur Auflösung unserer Aufgabe schon genug. Uebrigens schneiden die beyden Oerter einander wirklich in zwey Punkten E, ε, d. h. es sind nach den Angaben der Aufgabe noch 2 Pyramiden möglich, bey welchen alle vorkommende Bedingungen eintreffen, und es muß in jedem vorkommenden Fall aus andern Umständen entschieden werden, welches gerade der dißmahl gemeinte Punkt seye. Inzwischen bleiben wir nun nur bey einem dieser Punkte E stehen, und ziehen an denselben die Linien BE, CE, DE. Weil nun nach der Verzeichnung die Dreyeke ABE, abe ähnlich sind; so ist

ae : eb = AE : EB. Es ist aber ebenfalls nach der Verzeichn.
eb : ce = EB : CE.

Folglich gleichförmig ae : ec = AE : EC, also sind die Dreyeke aec, AEC gleichwinklicht, folglich der Winkel ACE gleich dem gegebenen ace. Eben so, weil
ae : ec = AE : EC , und
ec : ed = EC : ED; so ist

ae : ed = AE : ED; folglich sind die Dreyeke aed, AED gleichwinklicht, mithin der Winkel ADE gleich dem gegebenen ade. Für den Fall, wenn einer der beyden Oerter, oder beyde gerade Linien werden, hat die Komposition keine Schwierigkeit.

Berechnung.

Man findet durch die Formeln bey 2, II. Ap. die Linien HE, IE, ID, CI, CH. Vermittelst der beyden lezten und des bekannten Winkels ICH findet man IH und den Winkel IHC; folglich, da in dem Dreyek IHE jezt alle Seiten bekannt sind, findet man leicht die Winkel EIH, EHI, und weil die Winkel IHC, HIC vorher bekannt sind; so hat man folglich leicht die Winkel EID, EHB. Und nun findet man den Abstand des Punkts E von welchem der Punkte B, C, D man will, z. B. in dem Dreyek EDI, weil EI, ID nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind, ED und den Winkel EDI, und eben so bey jedem der übrigen Punkte.

Es erhellet von selbst, daß, wenn die Punkte B, C, D auch in einer geraden Linie liegen, die Aufgabe noch auf die nemliche Art aufgelößt wird. Uebrigens vergleiche man von dieser in der praktischen Geometrie sehr nüzlichen Aufgabe Lamb. Beiträge, 1. Theil, S.
140

140 flg. wo man zugleich einige ähnliche Aufgaben, welche auch auf diese Art aufgelößt werden, von S. 129 an finden wird, Tempelhof. Anal. endlicher Grössen, S. 281 flg. vergl. S. 250 flg. Schulze Taschenbuch, II. Theil, S. 454 flg. Newt. Arithm. Vniu. Probl. XXVII. S. 122 flg. der Gravess. Ausgabe.

15. Aufgabe.

Fig. 103.

In dem Dreyek ABC ist die Lage und Grösse der Grundlinie AB, und der gegen über stehende Winkel ACB gegeben, und die Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten hat zu dem Jnnhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß, das Dreyek zu finden.

Analyse.

Man theile AB in E in zwey gleiche Theile, und errichte das Perpendikel ED; so ist der Punkt E und die Lage der Linie ED gegeben. Es seye $2 \times FE$ zu EB das gegebene Verhältniß, welches die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Jnnhalt des Dreyeks haben soll; so ist, weil EB gegeben ist, auch FE (2. D.) und der Punkt F (30. D.) gegeben. Aus C fälle man auf ED das Perpendikel CD; so ist CD mit der der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffend, und weil der Jnnhalt des Dreyeks ACB gleich ist dem Rechtek DEB; so ist folglich $AC^2 + BC^2 : DE \times EB = 2 \times FE : EB = 2 \times FE \times ED : BE \times ED$, mithin die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem doppelten Rechtek $FE \times ED$, d. h. dem Rechtek, das enthalten ist zwischen einer der Grösse nach gegebenen Linie $2 \times FE$ und zwischen demjenigen Stük ED der der Lage nach gegebenen

benen Linie EF, welches zwischen einem auf ihr gegebenen Punkt E, und zwischen der Linie CD abgeschnitten wird, die aus C an EF mit der der Lage nach gegebenen Linie AB gleichlauffend gezogen wird: folglich berührt der Punkt C einen der Lage nach gegebenen Umkreis (6, II. Ap.). Weil aber auch der Winkel ACB gegeben ist; so berührt der Punkt C noch einen andern der Lage nach gegebenen Umkreis (2, I. A.). Mithin ist er gegeben (28. D.), folglich sind die Linien AC, BC der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.).

Komposition.

Man verzeichne den Ort (6, II. A.) so, daß $AC^2 + BC^2 = 2. FE \times ED$, d. h. man theile EF in G in 2 gleiche Theile, und beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GF einen Halbkreis FHE, ziehe durch B mit ED gleichlauffend die Linie BH, die dem Halbkreis FHE in H begegne, und durch H mit AB gleichlauffend die Linie HK, die der Linie ED in K begegne, und beschreibe aus G mit dem Halbmesser GK einen Kreis CKc. Ferner verzeichne man den Ort 2, I. A., d. h. man beschreibe über AB einen Kreisabschnitt ACcB, der des gegebenen Winkels ACB fähig seye (33, 3. E.). Die Kreise ACcB, CKc begegnen einander in den Punkten C, c, und man ziehe an einen derselben, an welchen man will, z. B. an C die geraden Linien AC, BC; so wird das Dreyek ACB das verlangte seyn, d. h. es wird den gegebenen Winkel ACB haben, und die Summe der Quadrate über AC, BC wird sich zu dem Innhalt des Dreyeks verhalten wie $2 \times FE$ zu EB. Daß der Winkel ACB der gegebene seye, erhellet von selbst, aus der Verzeichnung. Daß aber die Summe der Quadrate über AC, BC sich zu dem Innhalt des Dreyeks verhalte, wie 2. FE zu EB, kann folgen-

folgendermassen erwiesen werden. Man fälle aus C auf ED das Perpendikel CD, ziehe EC, und theile EG in dem Punkt I in 2 gleiche Theile; so ist (6. Lehns. II. Ap.) $AC^2 + BC^2 = 2(EC^2+EB^2)$. Aber $EC^2 - GC^2 = 2\ EG \times ID$ (1. Lehns. II. Ap.) $= EF \times ID$, oder $EC^2 = GC^2 + EF \times ID = GK^2 + EF \times ID = GF^2 - KH^2 + EF \times ID = GF^2 - EB^2 + EF \times ID$. Mithin ist $AC^2 + BC^2 = 2\ (GF^2 + EF \times ID) = 2.\ (\frac{1}{4}\ EF^2 + EF \times ID) = 2\ EF\ (\frac{1}{4}\ EF + ID) = 2\ EF \times ED$. Weil nun der Innhalt des Dreyeks gleich ist dem Rchtk $DE \times EB$; so ist folglich $AC^2 + BC^2 : \Delta\ ACB = 2.\ FE \times ED : BE \times ED = 2.\ FE : BE$, d. i. in dem gegebenen Verhältniß.

Bestimmung.

Weil, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, die Linie BH dem über EF beschriebenen Kreis wenigstens in Einem Punkt begegnen muß; so darf FG oder EG nicht kleiner seyn, als EB. Ist EG gleich EB; so fällt der Punkt K auf den Punkt G, und der einzige Punkt G ist in diesem Fall statt des Kreises CKc. Nun muß, wenn die Aufgabe in diesem Fall möglich seyn soll, auch der über AB beschriebene Kreis durch den Punkt G gehen; folglich ist der Winkel $AGE = \frac{1}{2}\ AGB = GAB = GBA$, also der Winkel AGB ein rechter, und das Dreyek AGB, das in diesem Fall entsteht, gleichschenklicht, oder unter allen möglichen Dreyeken, die über der gegebenen Grundlinie AB verzeichnet werden können, ist das gleichschenklichte, rechtwinklichte (dessen rechter Winkel der Seite AB gegenüber steht) dasjenige, bey welchem die Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten zu dem Innhalt des Dreyeks das möglich kleinste Verhältniß hat. Ueberhaupt aber wird in

 allen

allen Fällen, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, noch weiter erfodert, daß die Kreise CKc, ACcB einander schneiden, oder wenigstens in Einem Punkt begegnen sollen, d. h. wenn der Kreis ACcB der Linie ED in O begegnet; so darf GK nicht kleiner seyn als GO, oder EK, d. h. HB nicht kleiner seyn als EO. Man beschreibe also zuerst den Kreis ACcB. Ist nun EO grösser als HB; so ist die Aufgabe unmöglich, ist EO = HB; so berühren die beyden Kreise einander in O, ist EO < HB; so schneiden sie einander in 2 Punkten C, c. Noch könnte man denken, ob nicht vielleicht unter gewissen Umständen die Kreise CKc, ACcB in Einen Kreis zusammen fallen. Allein diß kann nie geschehen. Denn da $GK^2 = GH^2 - EB^2 = GE^2 - EB^2$; so kann nicht auch zugleich $GK^2 = GE^2 + EB^2$ seyn, wie seyn müßte, wenn die Kreise KCc, ACB zusammenfallen, folglich der Kreis KCc durch die Punkte A, B gehen sollte.

Berechnung.

Es seye S der Mittelpunkt des Kreises ACB; so findet man nach der Berechnung von 2, I. A. ES, folglich hat man, weil EG gegeben ist, auch SG. Ebenfalls nach der Berechnung von 2, I. A. findet man SC, und GC ist $= \sqrt{EG^2 - EB^2} = \sqrt{(EG+EB)(EG-EB)}$, folglich findet man in dem Dreyek SCG, da nun alle drey Seiten bekannt sind, leicht den Winkel CSG. Und, da der Winkel ASE = ACB gegeben ist; so hat man folglich auch den Winkel ASC, mithin in dem gleichschenklichten Dreyek ASC leicht die Seite AC. Eben so findet man den Winkel CSB, und die Seite CB.

Anmer-

Anmerkung.

Wäre statt des Verhältnisses, welches die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks hat, das Verhältniß des Unterschieds der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks gegeben; so würde die Aufgabe nach dem Zusaz von 6, II. A. im ersten Anhang des Uebersezers aufgelößt. Wäre statt des Verhältnisses, welches die Summe der Quadrate von AC, BC zu dem Dreyek hat, das Verhältniß von einem dieser Quadrate zum Innhalt des Dreyeks gegeben; so brauchte man zu der Auflösung 3, II. A. Wäre endlich die Summe oder der Unterschied der Quadrate über AC, BC selbst gegeben; so würde die Auflösung nach 5, oder 1, II. A. gemacht werden. Ja man kann auch bey den hier vorkommenden Angaben die Aufgabe auf 5, II. A. bringen. Nemlich, weil der Winkel C gegeben ist; so hat, wenn er spizig ist nach 75. D., wenn er stumpf ist, nach 74. D. der Unterschied des Quadrats über AB, und der Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß. Nach der Voraussezung aber hat auch die Summe der Quadrate über AC, BC zu dem Innhalt des Dreyeks ein gegebenes Verhältniß. Mithin hat der Unterschied des Quadrats über AB, und der Summe der Quadrate über AC, BC zu eben dieser Summe der Quadrate über AC, BC ein gegebenes Verhältniß (9. D.). Folglich ist auch das Verhältniß des Quadrats über AB zu der Summe der Quadrate über AC, BC gegeben (7. D.), mithin ist, weil AB, folglich das Quadrat über AB gegeben ist, auch die Summe der Quadrate über AC, BC gegeben (2. D.). Ist der Winkel ACB ein rechter; so ist ohnehin die Summe der Quadrate über AC, BC gleich dem Quadrat über AB, folglich gegeben.

16. Aufgabe.

Es ist der Innhalt des Fünfeks ABCDE, eine Seite AB der Lage und Grösse nach, das auf diese Seite von der gegenüber stehenden Spize gefällte Perpendikel DF der Grösse nach, ferner das Verhältniß der Seiten DE, EA und der Winkel DEA, und eben so das Verhältniß der Seiten DC, CB und der Winkel DCB gegeben: das Fünfek zu finden.

Analyse.

Weil AB, DF der Grösse nach gegeben sind; so ist das Rchtk AB×DF, d. h. der doppelte Innhalt des Dreyeks ADB, mithin dieser Innhalt selbst der Grösse nach gegeben, folglich berührt der Punkt D, weil auch die Lage von AB gegeben ist, eine der Lage nach gegebene mit AB gleichlauffende gerade Linie (3, I. A.). Und, weil der Winkel bey E, und das Verhältniß der ihn einschliessenden Seiten, und eben so der Winkel bey C und das Verhältniß der ihn einschliessenden Seiten gegeben sind; so sind die Dreyeke AED, BCD der Gattung nach gegeben (44. D.). Endlich, da der Innhalt des Fünfeks gegeben ist; so ist auch der Ueberschuß des Fünfeks über das gegebene Dreyek ABD gegeben, d. h. es ist die Summe der über AD, BD beschriebenen der Gattung nach gegebenen Dreyeke gegeben, folglich berührt der Punkt D einen der Lage nach gegebenen Umkreis (5, II. A.). Mithin ist dieser Punkt gegeben (28. D.); folglich sind die Linien AD, BD der Lage und Grösse nach gegeben (29. D.), und, weil die Winkel EAD, EDA, DBC, BDC gegeben sind; so sind die Linien AE, DE, BC, DC der Lage nach (33. D.), mithin die Punkte E, C (28. D.), folglich auch die Linien AE,

AE, DE, BC, DC der Grösse nach (29. D.) gegeben.

Komposition und Bestimmung.

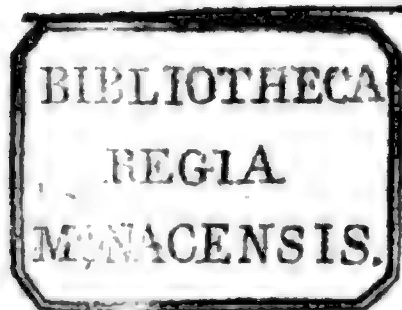
Es seye M der Ueberschuß des gegebenen Innhalts des Fünfeks über die Hälfte des Rchtks AB×FD, und man beschreibe den Ort 5, II. A. so, daß die Summe der der Gattung nach gegebenen über AD, BD beschriebenen Figuren gleich seye dem Raum M. (Die weitere Entwiklung dieser Komposition ist überflüssig, weil doch nur die Komposition von 5, II. A., welche doch nicht so ganz kurz ist, abgeschrieben werden müßte. Ich bemerke also nur um des folgenden willen, daß in der Fig. 104. P den Mittelpunkt des Kreises bedeuten solle, welcher der Ort ist). Eben so beschreibe man den Ort (3, I. A.) so, daß der Innhalt des Dreyeks gleich seye der Hälfte des Rechteks AB×DF. D seye der Punkt, in welchem die beyden Oerter einander begegnen. Man ziehe AD, BD, und auf diesen Linien beschreibe man die Dreyeke AED, BCD so, daß sie die gegebenen Winkel E, C haben, und daß die Seiten AE, EC und eben so auch die Seiten BC, DC das gegebene Verhältniß unter einander haben; so ist ABCDE das verlangte Fünfek. Der Beweis erhellet von selbst. Weil aber erfodert wird, daß der aus P mit dem Halbmesser PD beschriebene Kreis der Linie FD in D begegne; so darf PD nicht kleiner seyn, als FD, d. h. das Quadrat über DP oder eine Figur, die sich zu dem Raum N (5, 2. A. Ister Fall 3.) verhält, wie das dort vorkommende Quadrat über GH zu der Summe der Räume, die dort K, L heissen, darf nicht kleiner seyn, als das Quadrat über DF.

Berech-

Berechnung.

Man findet AP, BP, PD durch die Berechnung von 5, II. A. Da nun DF gegeben ist; so findet man in dem rechtwinklichten Dreyek PFD leicht den Winkel DPB, mithin kennt man nun in den Dreyeken APD, BPD die Seiten AP, PD, und BP, PD nebst den eingeschlossenen Winkeln, und findet hieraus AD, BD, woraus sich alles übrige leicht ergiebt.

Es ist begreiflich, daß bey Vieleken von mehreren Seiten ähnliche Aufgaben vorkommen, und auf ähnliche Art aufgelöst werden können.



Verbesserungen.

S. 16 Linie 3 'Ω lies 'Ω.
— 41 — 11 BA und AE, lies BA, und AE,
— 67 — 15 X = AN lies = AN.
— 80 — 11 zu gleichende Linien lies zu ziehende Linien.
— — — 29 ef aequo lies ex aequo.
— 121 — 1 seyn lies seye.
— 127 — 27 der Seite AE lies der Linie AE.
— 129 — 27 AG× lies AG × γ.
— 130 — 16 HK : HK lies HK : HL.
— 131 — 19 BD lies BS.
— 133 — 5 nach lies noch.
— — — 10. 11 und 33 = DQ, CR lies DQ : CR.
— 135 — 5 QB lies QR.
— 142 — 19 Z lies Q.
— — — — AS×ζ lies AS×δ.
— — — 33 bey geraden Linien lies bey 4 geraden Linien.
— 144 — 8 Fig. 46. e. lies Fig. 40. e.
— 158 — 24 C'SA lies C''SA.
— 160 — 6 SB = SB lies SB'' = SB.
— — — 26 CSD lies CSB.
— 172 — 21 diesem lies diesen.
— 174 — 5 sin. AED : sin. (AFD + ADF)
lies sin. AED. sin. (AFD + ADF)
— 176 — 8 Pellgrmme lies Prllgrmme.
— 183 — 32 gerad lies gerade.
— 196 — 18 nach lies noch.
— 199 — 6 in lies an.
— 200 — 21 FD lies FP.
— 202 — 13 den lies der.
— 206 — 25 Winkeln lies Winkel.
— 236 — 2 seye lies seyn.
— 249 — 26 Linie lies Linien.

S. 253 Linie 4 BG lies BG =

— 254 — 10 $\frac{a}{2}$ lies $\frac{a}{2}$

— 283 — 28 Punten lies Punkten.

— 299 — 16 Fall 3γ lies Fall 3, γ.

— 302 — 2 $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vartheta$ lies $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,b$.

— — — 22 $-:2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)\ldots$
lies $-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)\ldots$

— 303 — 20. 21. 22. 23. e lies r.

— 304 — 23. 24. 25. 27. 30. e lies r.

— 305 — 1. 5. 10. 28. e lies r.

— 307 — 24 $\frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} =$ lies $\frac{\alpha^2 a^2}{(\alpha+\beta)^2} -$

— 308 — 12 sin. C. cosin. BCF lies = sin. C. cosin. BCF.

— 309 — 21. 22. e lies r.

— 310 — 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 10. 11. 12. 13. statt 6 lies e.

— — — 15. 16 e lies r.

— 314 — 1 Fig. 65. c. lies Fig. 65. e.

— 333 — 10 den Punkt lies dem Punkt.

— — — 17 Lehnsaz lies Lehrsaz.

— 359 — 28 eb lies e, b.

Bey S. 227 Linie 19 flg. und S. 231 Linie 22 flg. muß bemerkt werden, daß statt der Fig. 54. c. vorkommenden kleinen punktirten Buchstaben in dem gedrukten Text große Cursiv-Buchstaben gesezt worden sind.

Tab. I.

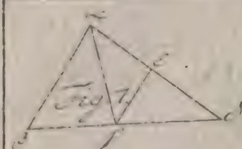
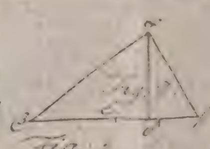
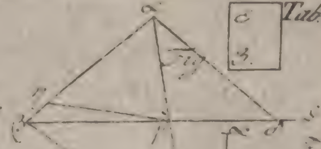
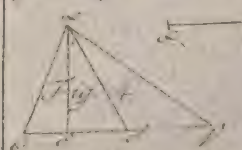
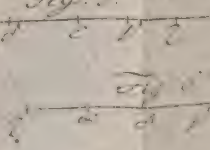
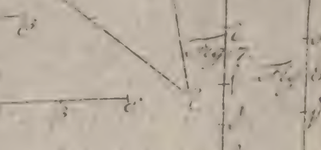
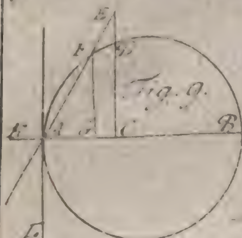








Fig. 9.

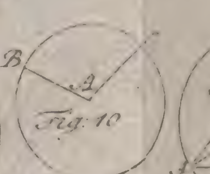



Fig. 10

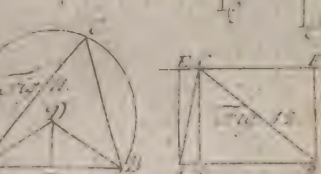
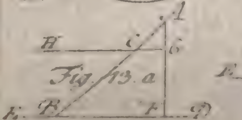




Fig. 13. a

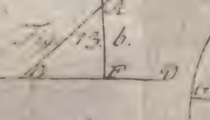



Fig. 13. b.

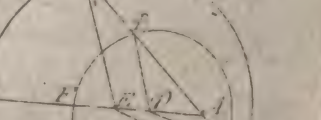
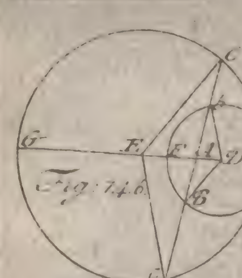




Fig. 14. b.

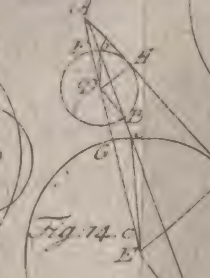



Fig. 14. c

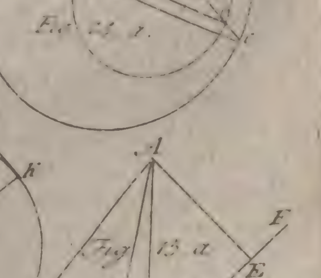



Fig. 15. a.

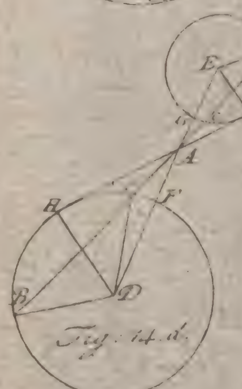



Fig. 14. d.

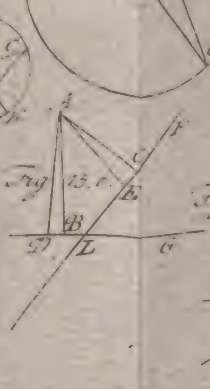
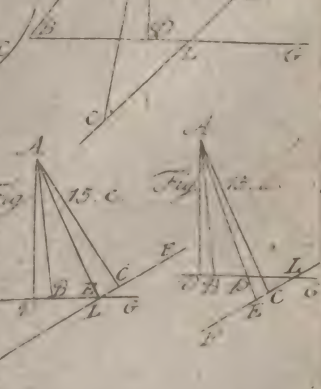




Fig. 15. c.

Tab. IV.

Fig. 10. a.

Fig. 10. b.

Fig. 17.

Fig. 18. a.

Fig. 18. b.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Tab. III

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32. a

Fig. 32. b

Fig. 32. c

Fig. 32. d.

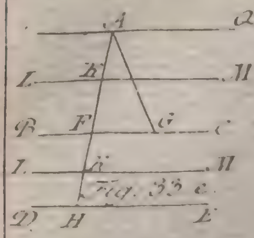
Fig. 33. a

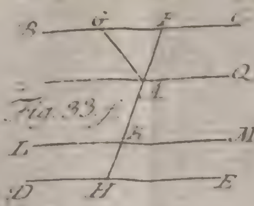
Fig. 33. b.

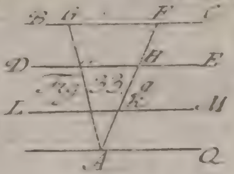
Fig. 33. c.

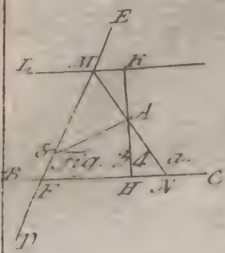
Fig. 33. d.

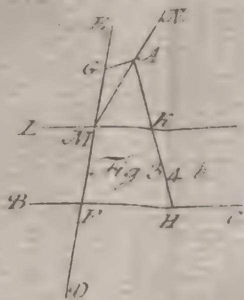
Tab. IV.

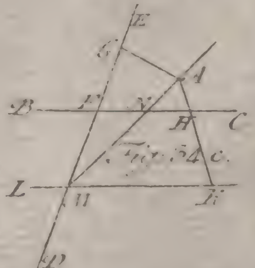


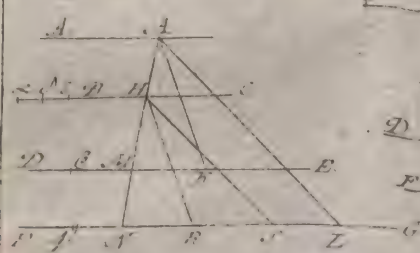












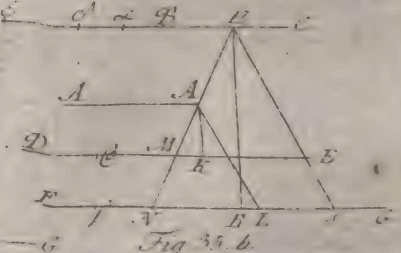
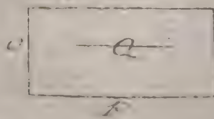
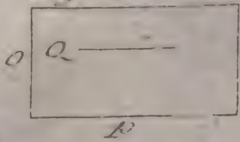
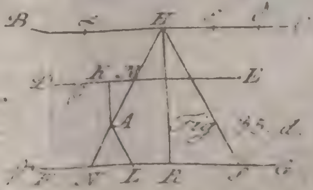


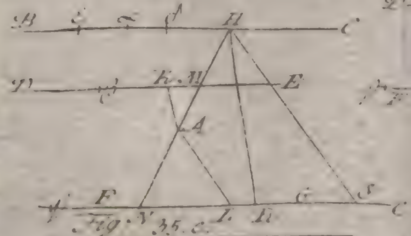
Fig. 35. b.

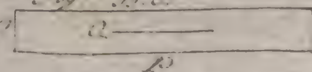
Fig. 35. a

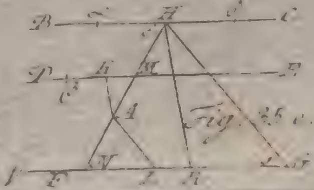












Tab. V.

Fig. 35. f.

Fig. 35. g.

Fig. 35. h.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39. a.

Fig. 39. b.

Fig. 39. c.

Fig. 39. d.

Fig. 39. e.

Tab. VI

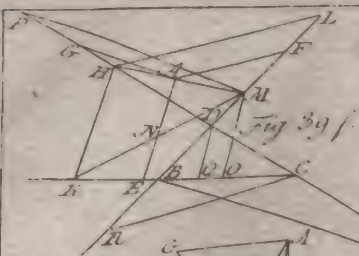


Fig 39 f

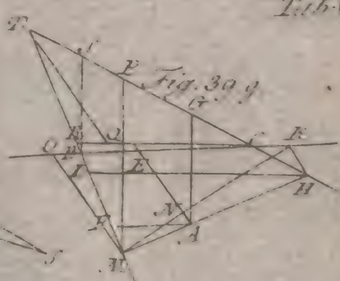


Fig. 39 g

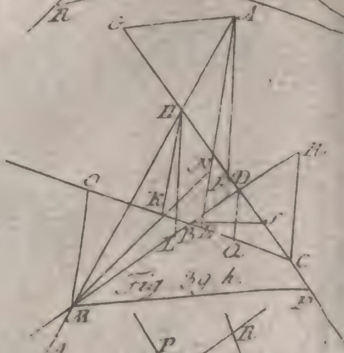


Fig 39 h

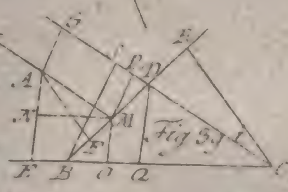


Fig 39 i

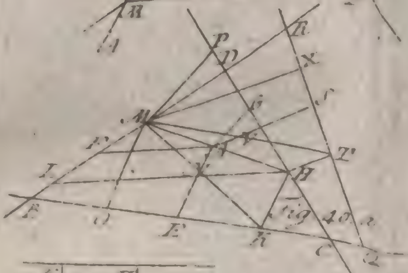


Fig 40 a

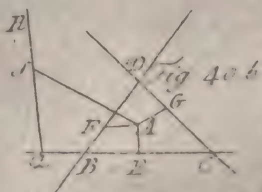


Fig 40 b

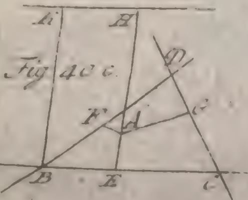


Fig 40 c.

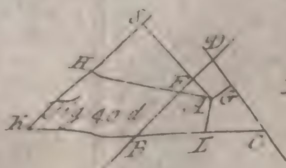


Fig 40 d

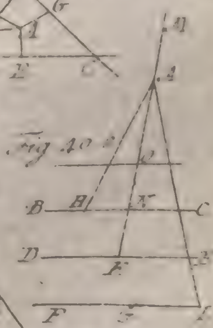


Fig 40 e

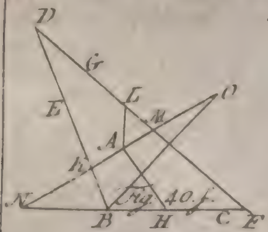


Fig. 40. f.

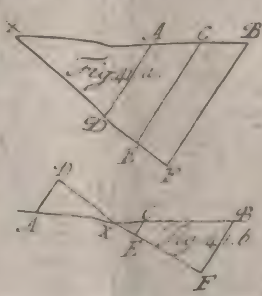
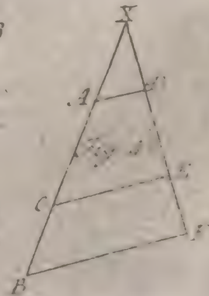
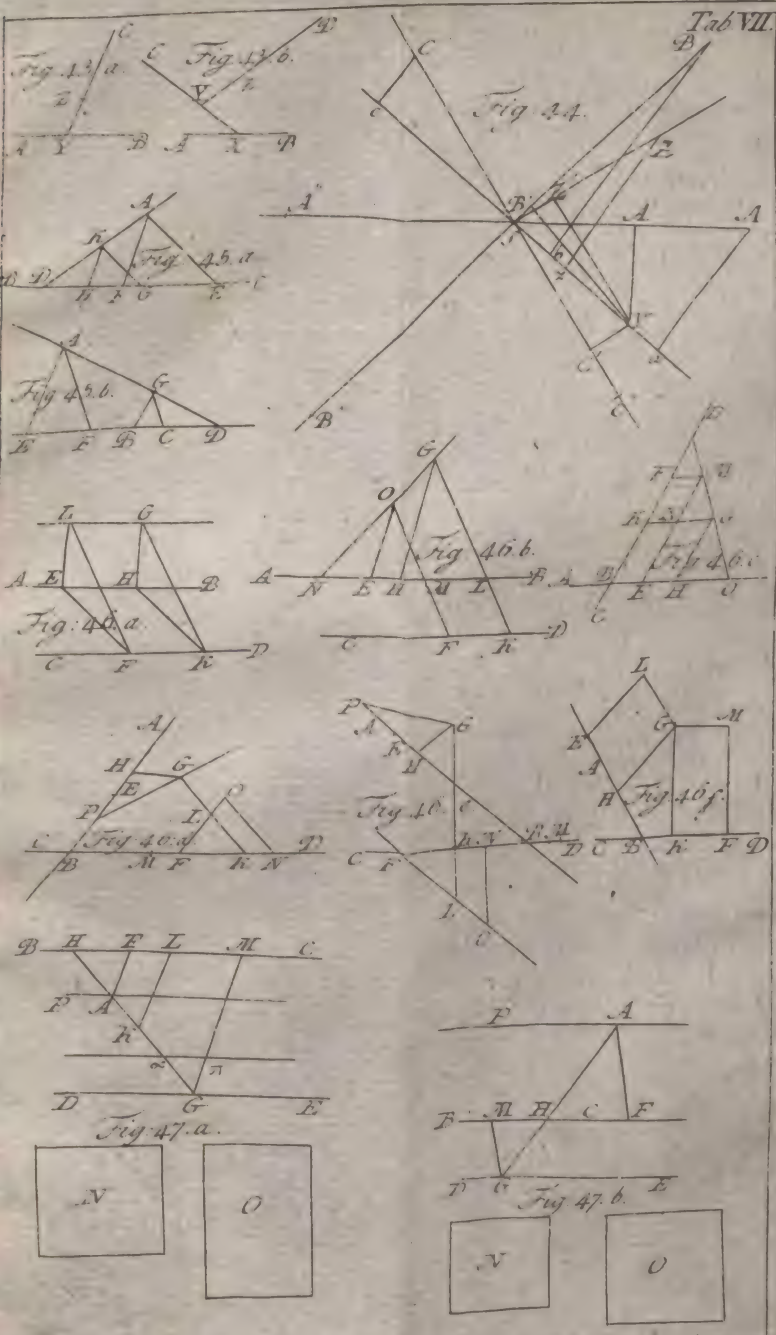


Fig 41 a
Fig 41 b





Tab. VII.
Fig. 43. a.
Fig. 43. b.
Fig. 44.
Fig. 45. a.
Fig. 45. b.
Fig. 46. a.
Fig. 46. b.
Fig. 46. c.
Fig. 46. d.
Fig. 46. e.
Fig. 46. f.
Fig. 47. a.
Fig. 47. b.

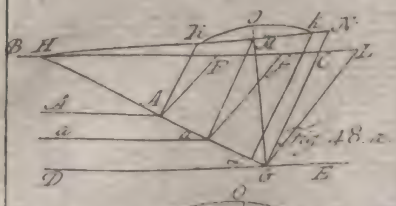


Fig. 48. a.

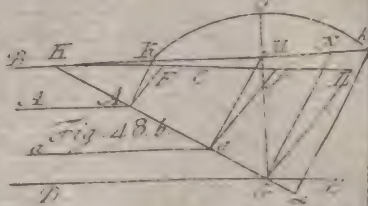
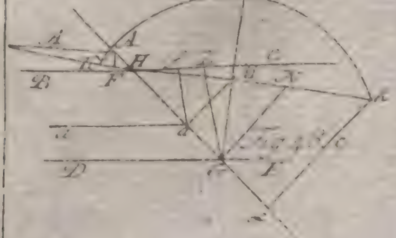
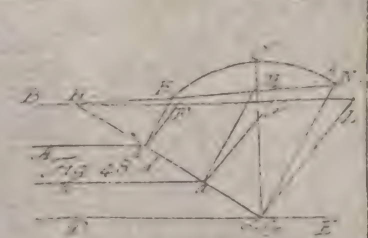


Fig. 48. b.





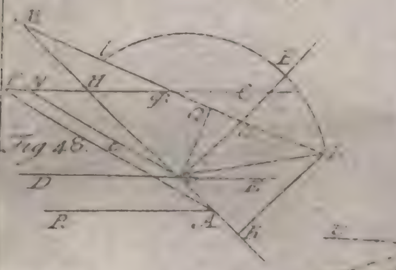


Fig. 48.

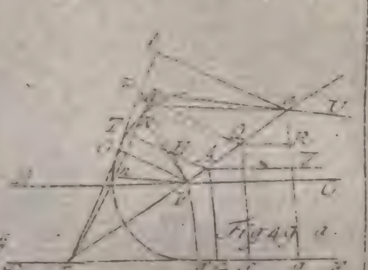


Fig. 49. a.

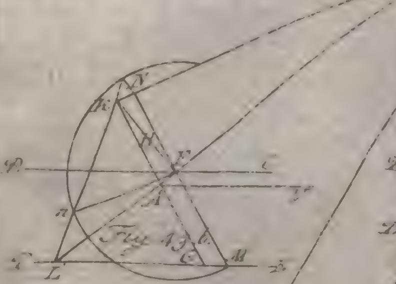
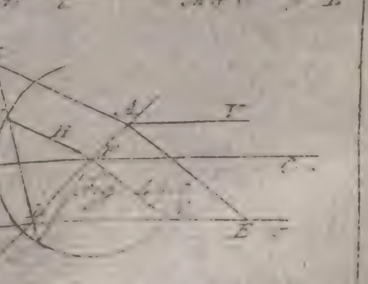


Fig. 49. b.



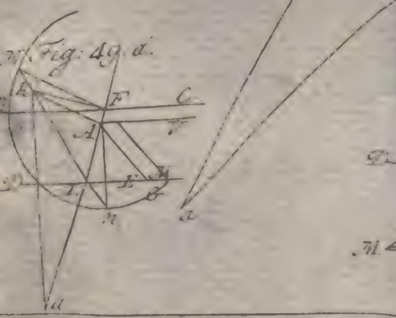


Fig. 49. d.

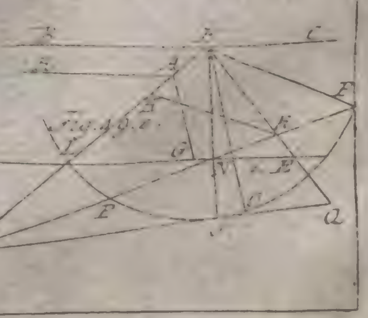
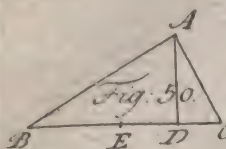
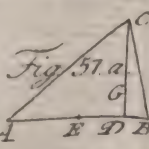


Fig. 49. e.

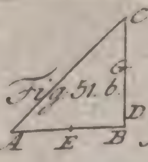
Tab. IX.



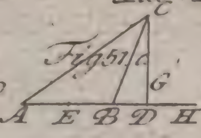
A
Fig: 50.
B
E
D
C



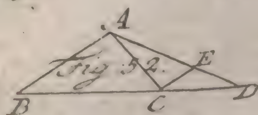
C
Fig. 51. a.
G
A
E
D
B



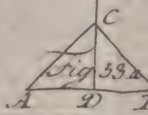
C
G
Fig. 51. b.
D
A
E
B



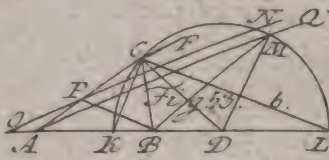
C
Fig. 51. c.
G
A
E
B
D
H



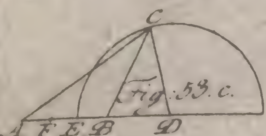
A
Fig: 52.
E
B
C
D



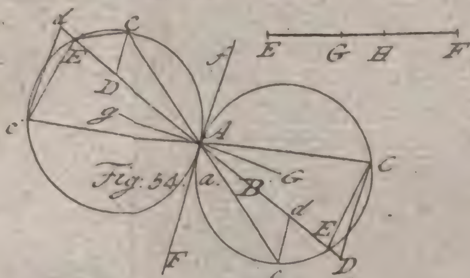
C
Fig. 53. a.
A
D
B



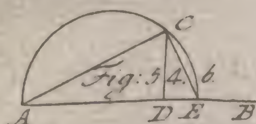
N
O
G
F
M
P
Fig. 53.
b.
Q
A
K
B
D
L



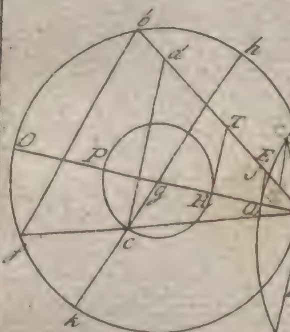
C
Fig: 53. c.
A
F
E
B
D



d
C
E
G
H
F
E
D
f
g
c
A
C
Fig: 54. a.
G
B
d
E
F
c
D



C
Fig: 54. b.
A
D
E
B



b
d
h
T
O
P
E
g
H
O
c
f
k

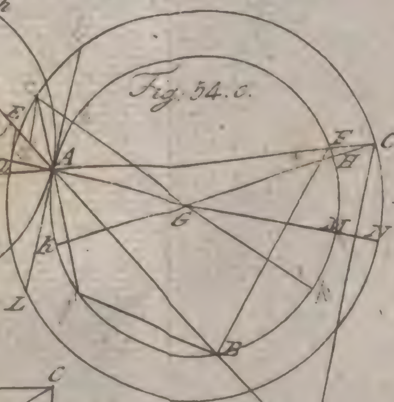
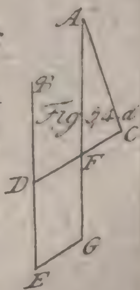
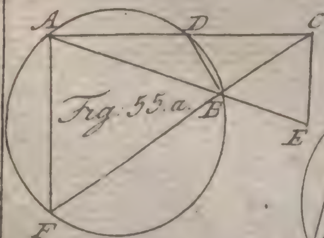


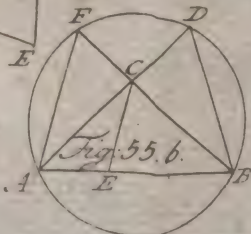
Fig. 54. c.
A
F
C
H
G
M
N
k
L
B
D



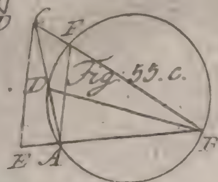
A
Fig. 54. d.
C
F
D
G
E



A
D
C
Fig. 55. a.
B
E
F

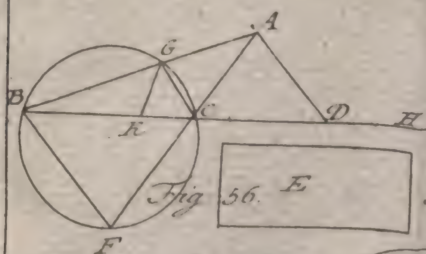


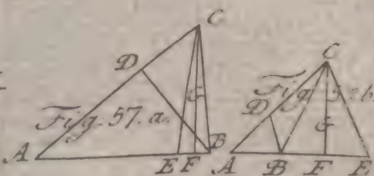
F
D
C
Fig. 55. b.
A
E
B

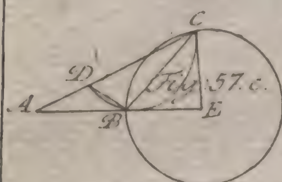


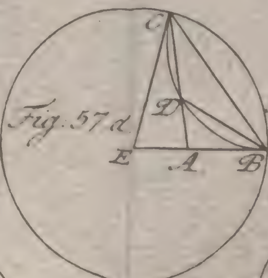
C
F
D
Fig. 55. c.
F
E
A

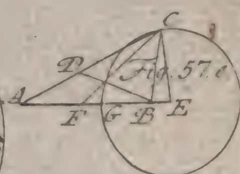
Tab: X

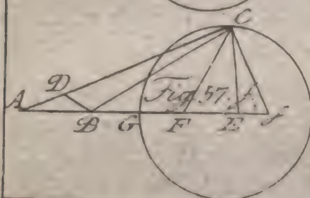


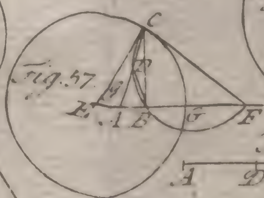












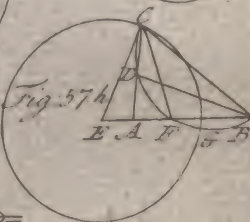


Fig. 57. k.

A D E C F B

Fig. 57. l.

F A D C B E

1. A F H G B E

2. A F B E G H

3. A B G F E H

4. A B F E G H

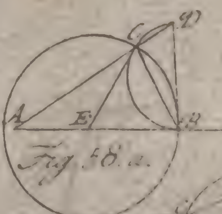
Fig. 57. i.

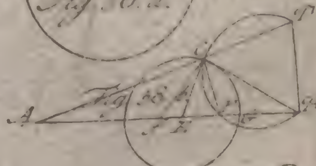
5. E A B G H F

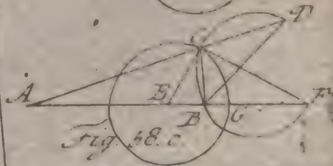
6. H E A F G B

7. H G E A B F

8. H G E A F B







Tab. XI.

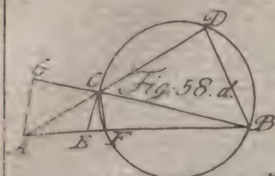
A E B G H F

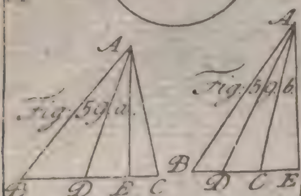
A H E F G B

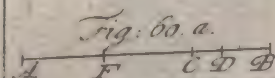
Fig: 58. e.

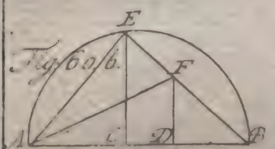
A H G E B F

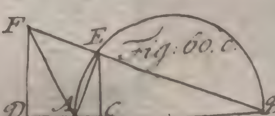
H A G E F B

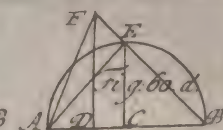


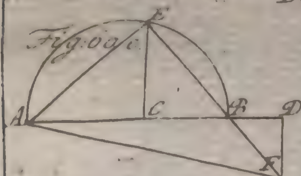


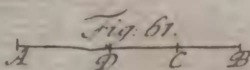


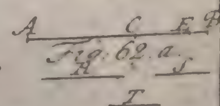


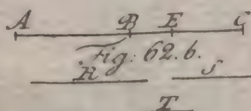


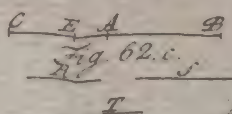


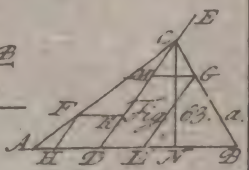


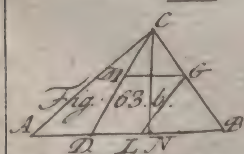


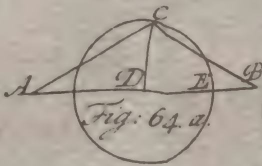


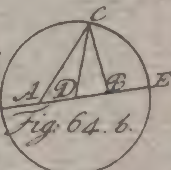


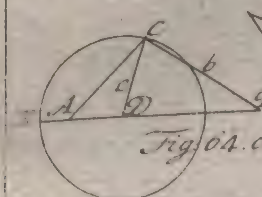


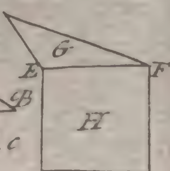


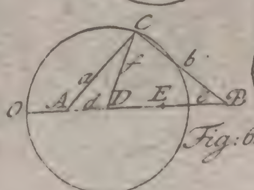


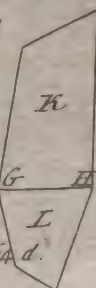












Tab. XII

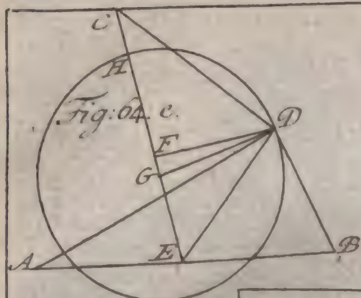


Fig: 64. c.
C
H
F
G
D
A
E
B

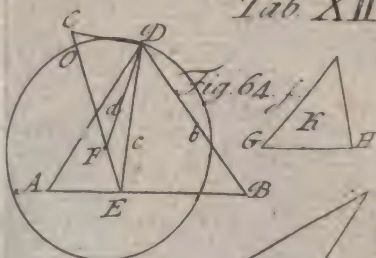


Fig. 64. f.
C
D
O
d
F
c
b
A
E
B
K
G
H
L
M

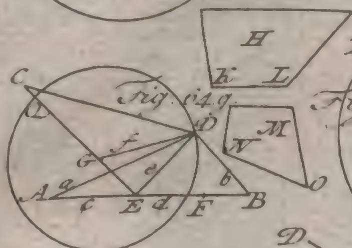


Fig. 64. g.
C
D
G
f
e
a
b
A
c
E
d
F
B
H
K
L
M
N
O

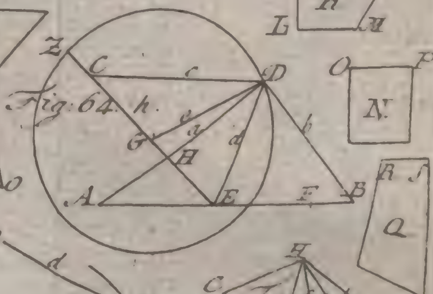
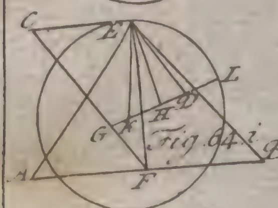
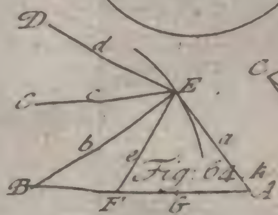
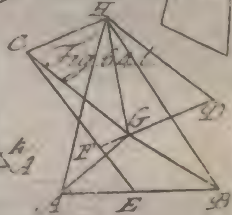
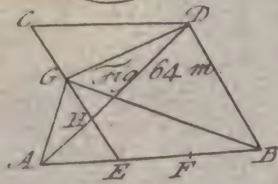


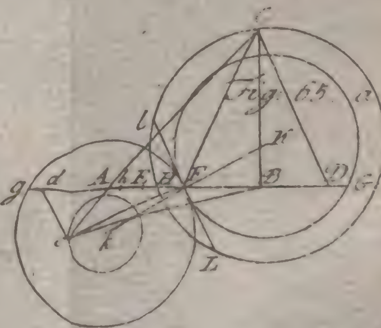
Fig: 64. h.
Z
C
c
D
G
e
a
d
b
H
A
E
F
B
O
P
N
R
S
Q

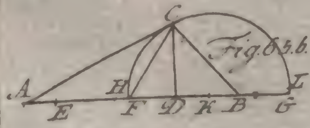

C
E
L
D
H
G
K
Fig. 64. i
A
F
B

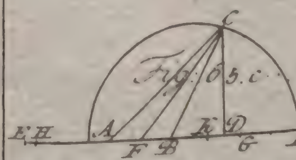

D
d
C
c
E
b
a
e
Fig: 64. k
B
F
G
A

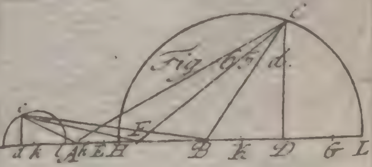

H
C
Fig. 64. l
G
D
F
A
E
B


C
D
G
Fig 64 m.
H
A
E
F
B


C
Fig: 65.
c
l
K
g
d
A
h
E
H
F
D
G
k
L


C
Fig. 65. b.
A
H
L
E
F
D
K
B
G


C
Fig: 65. c.
E
H
A
K
D
F
B
G
L


C
Fig: 65. d.
E
g
d
k
A
E
H
B
K
D
G
L

Tab. XIII

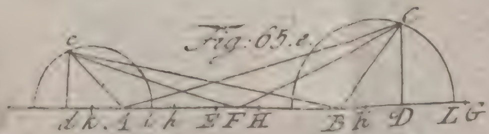


Fig: 65. e.

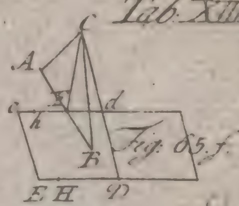


Fig: 65. f.

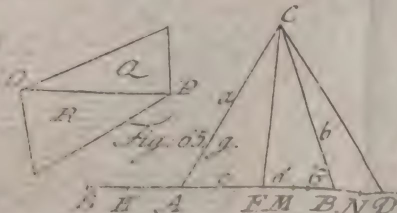


Fig: 65. g.

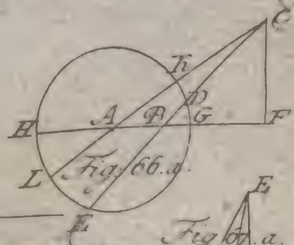


Fig: 66. a.

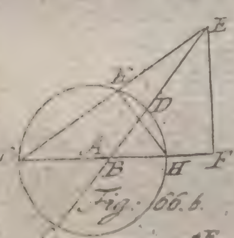


Fig: 66. b.

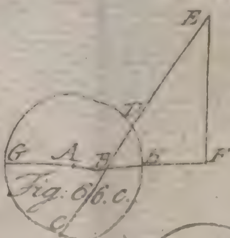


Fig: 66. c.

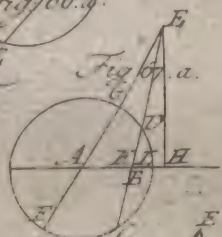


Fig. 67. a.

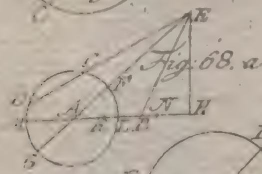


Fig. 68. a

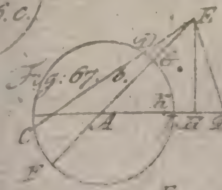
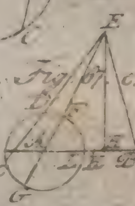


Fig. 67. b.



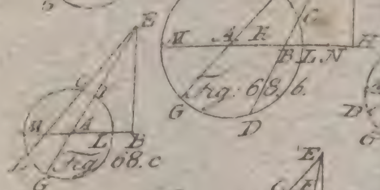
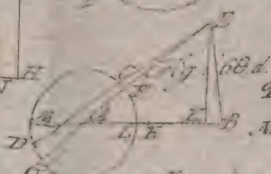
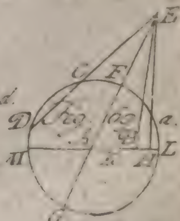


Fig. 68. c
Fig: 68. b.


68. d.



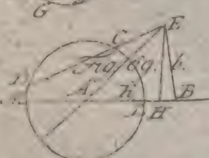
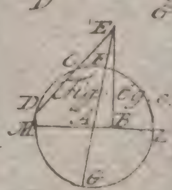


Fig. 69. b.



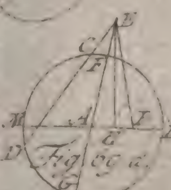
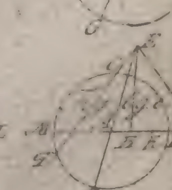


Fig. 69. d.



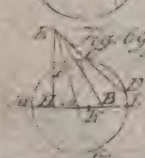


Fig. 69. f.

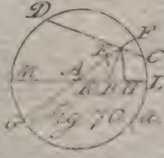
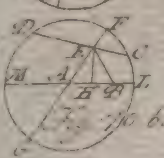


Fig. 70. a.


70. b.

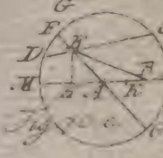
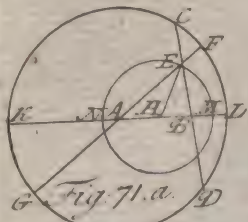
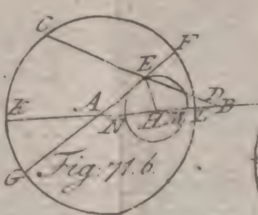
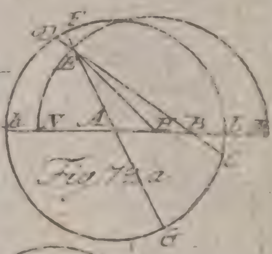


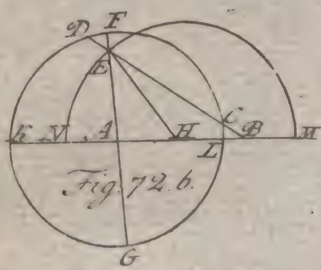
Fig. 70. c.

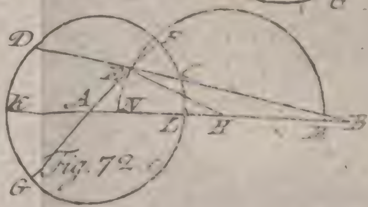
Tab. XIV

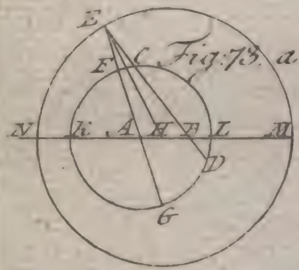


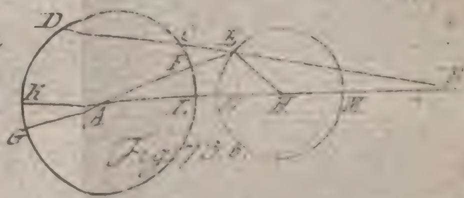


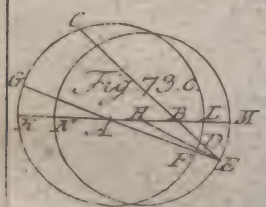


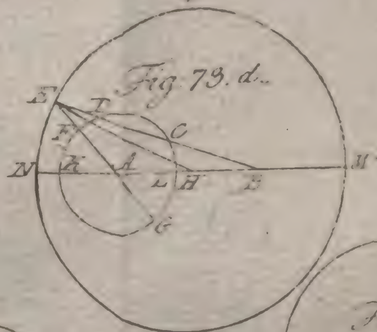


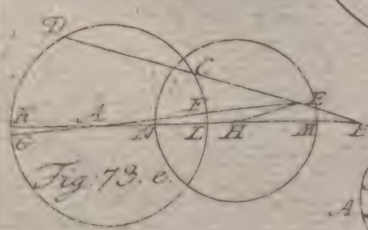


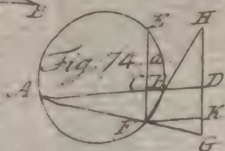


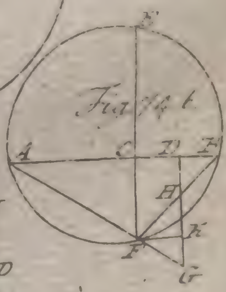












Tab. XV.

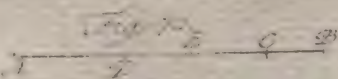


Fig. 75.

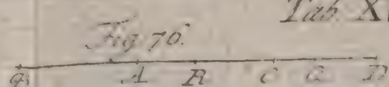


Fig. 76.

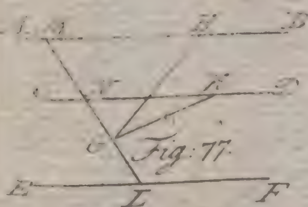


Fig. 77.

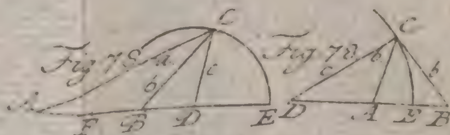


Fig. 78.
Fig. 78.

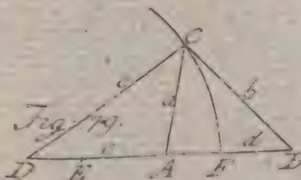


Fig. 79.

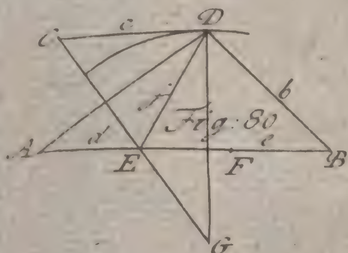


Fig. 80.

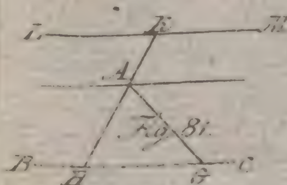


Fig. 81.

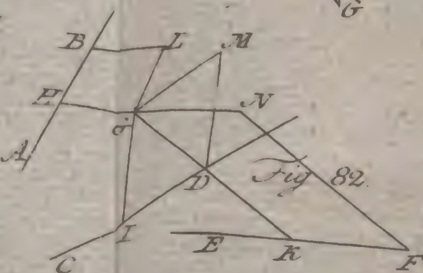


Fig. 82.

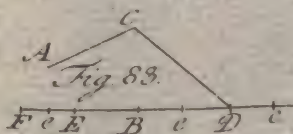


Fig. 83.

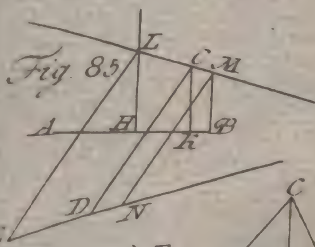


Fig. 85.

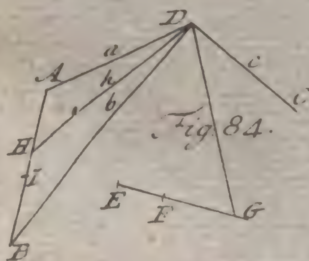


Fig. 84.

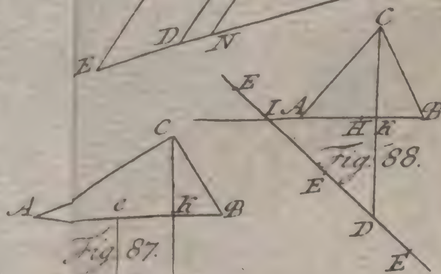


Fig. 88.
Fig. 87.

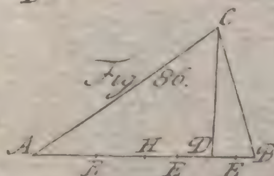
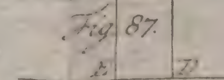
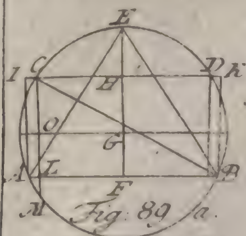


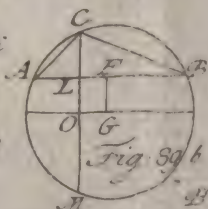
Fig. 86.



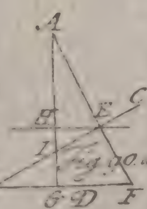
Tab. XVI



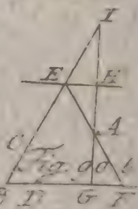
E
I C
D K
H
O
G
A L
B
F
M
Fig: 89 a.



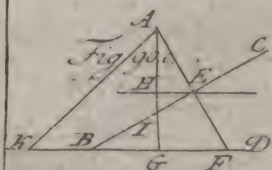
C
A
E
L
O G
Fig. 89 b
M



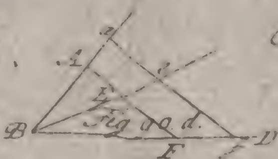
A
C
H E
I
Fig. 90. a.
B
G D F



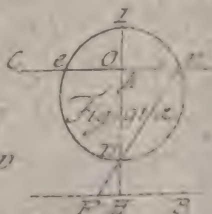
I
E H
A
C
Fig. 90 b
B D G F



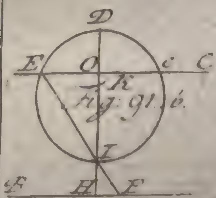
A
Fig. 90. c.
C
H E
I
K B G F D



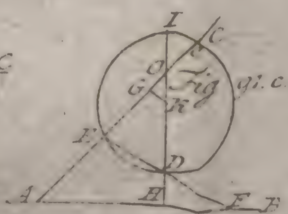
A
Fig. 90 d.
B
F
D



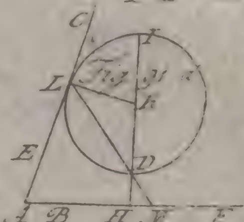
I
C e O
Fig. 91 z.
F E B



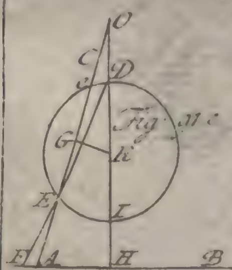
D
E O c C
K
Fig: 91. b.
L
F H E



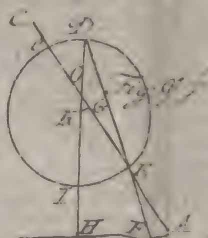
I
C
O
G Fig. 91. c.
K
D
A H E B



C
I
L Fig. 91
K
E
D
A B H N F



O
C
D
Fig.
G
K
E
L
A H B



C
D
O
K
I
H F

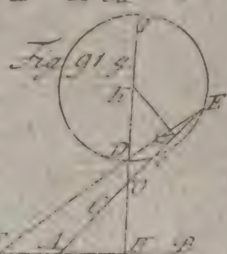
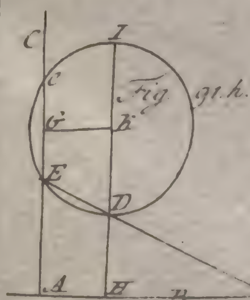
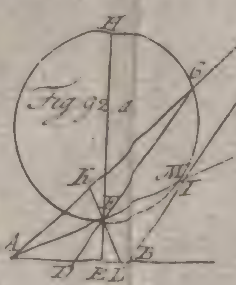


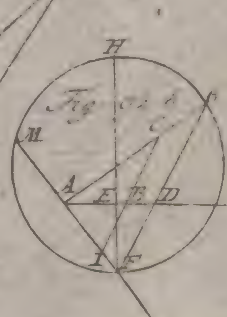
Fig. 91 g.
E
D



C
I
c
Fig. 91. h.
G K
E
D
A H B F

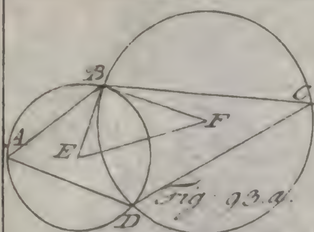


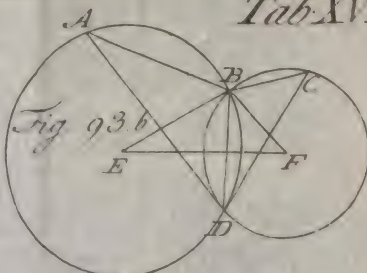
H
G
Fig. 92 a
K
M
I
A
B
D E L



H
M
A E D
I F

Tab. XVII


B
C
F
A
E
D
Fig. 93. a.


A
B
C
Fig. 93. b
E
F
D

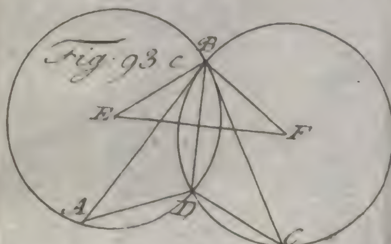
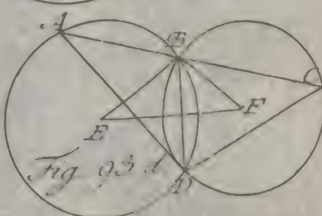
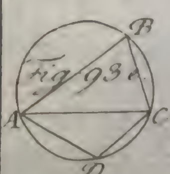
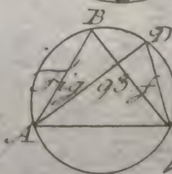
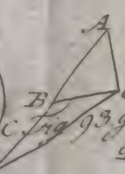


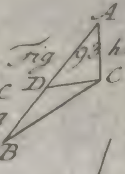
Fig. 93. c
B
E
F
A
D
C

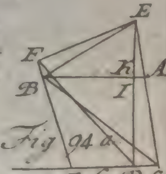

A
B
C
F
E
Fig. 93. d

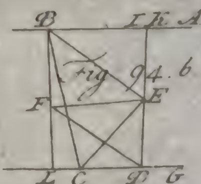

B
Fig. 93. e
A
C
D

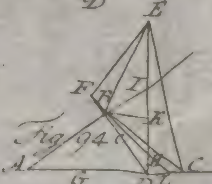

B
D
Fig. 93. f
A
C

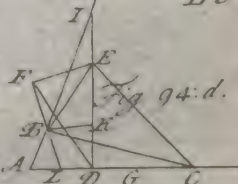

A
B
C
Fig. 93. g
D

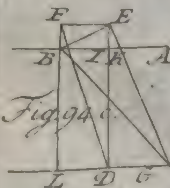

A
Fig. 93. h.
D
C
B

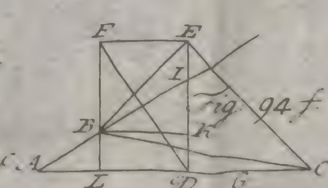

E
F
K
A
B
I
Fig. 94. a
L
G
D
C

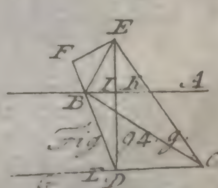

B
L
K
A
Fig. 94. b
F
E
L
C
D
G

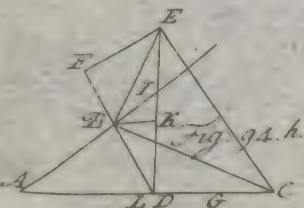

E
F
I
K
Fig. 94. c
A
G
D
L
C

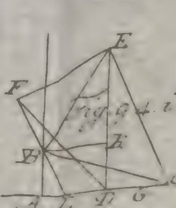

I
E
F
Fig. 94: d.
K
A
L
D
G
C

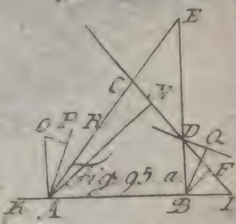

F
E
B
I
K
A
Fig. 94. e.
C
L
D
G


F
E
I
Fig. 94. f.
B
K
A
L
D
G
C

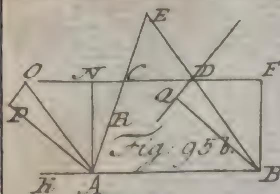

E
F
I
K
A
B
Fig. 94. g
C
L
D


E
F
I
B
K
Fig. 94. h.
A
L
D
G
C

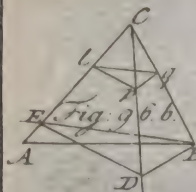

E
F
Fig. 94. i
K
B
A
L
D
G
C


E
C
V
O
P
R
D
Q
F
Fig. 95. a.
K
A
B
I

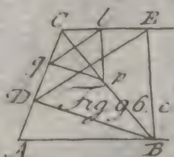
Tab. XVIII



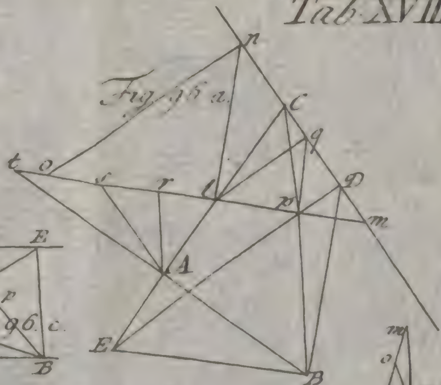
E
O
N
C
D
F
P
a
R
Fig: 95 b.
K
A
B



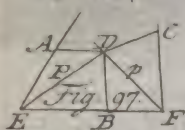
C
l
q
p
E
Fig: 96. b.
A
B
D



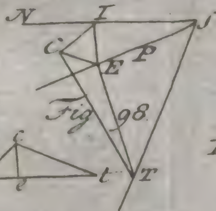
C
l
E
q
p
D
Fig. 96. c.
A
B



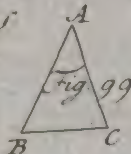
n
Fig. 96 a.
C
q
t
o
s
r
l
D
p
m
A
E
B



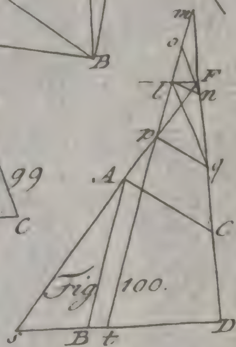
A
D
C
P
p
Fig
97
E
B
F



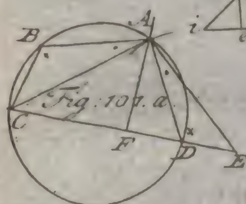
N
I
s
C
P
E
Fig
98
c
i
e
t
T



A
Fig. 99
B
C



m
o
F
l
n
p
A
q
C
Fig
100.
s
B
t
D



B
A
Fig: 101. a.
C
F
D
E

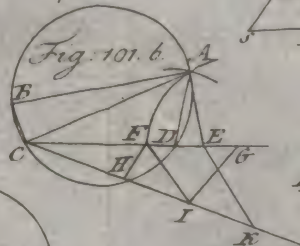
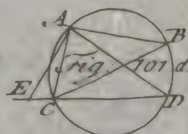
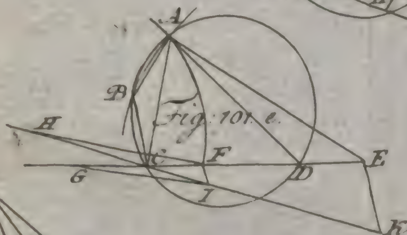


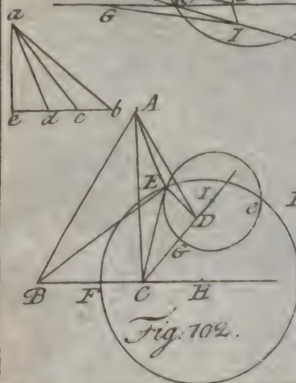
Fig: 101. b.
A
B
F
D
E
C
H
G
I
K



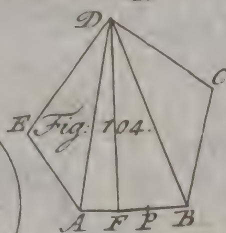
A
B
Fig. 101 d
E
C
D



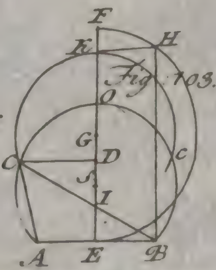
A
B
Fig: 101. c.
H
C
F
E
G
D
I
K



a
e
d
c
b
A
E
I
D
c
G
B
F
C
H
Fig: 102.



D
C
E
Fig: 104.
A
F
P
B



F
K
H
Fig: 103.
O
G
D
C
c
I
A
E
B